ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КАБИНЕТ
ПО ЗАОЧНОМУ ОБУЧЕНИЮ УЧИТЕЛЕЙ

С. В. ФИЛИЧЕВ

СБОРНИК УПРАЖНЕНИЙ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АРИФМЕТИКЕ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ
УЧИТЕЛЬСКИХ ИНСТИТУТОВ

УЧПЕДГИЗ · 1948

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Научно-методический кабинет по заочному обучению учителей

С. В. ФИЛИЧЕВ

СБОРНИК УПРАЖНЕНИЙ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АРИФМЕТИКЕ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ
УЧИТЕЛЬСКИХ ИНСТИТУТОВ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА • 1948

СОДЕРЖАНИЕ

1. **Различные системы счисления** **3**
2. **Четыре действия с натуральными числами в различных системах счисления** **4**
   а) Сложение и вычитание **4**
   б) Умножение и деление **6**
3. **Делимость чисел** **8**
4. **Дробные числа** **14**
5. **Смешанные упражнения** **19**
   Контрольное задание № 1 (*a*, *b* и *c*) **62**
   Контрольное задание № 2 (*a*, *b* и *c*) **63**

Редактор Проф. *А. М. Знаменский.* Техн. редактор *М. Д. Петрова.*

А 06788. Подписано к печати 22/X 1948 г. Печ. л. 4.
Уч.-изд. л. 3,92. Тираж 5000 экз. Заказ № 679.

Типография № 3 Управления издательств и полиграфии
Исполкома Ленгорсовета

1. РАЗЛИЧНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

1. Сколько находится чисел между 10 и 100? 100 и 1000?

2. В многозначном числе вправо от цифры 8 стоят две цифры, влево от неё поставлены два нуля и влево от них стоит цифра 5. Что означают цифры 8 и 5?

3. Число $N = 429_{10}$ написать по пятиричной системе счисления.

4. Число $N = 572_{10}$ написать по двенадцатиричной системе счисления.

Примечание. Для числа 10 примем знак a, для числа 11 — знак b, а прочие знаки оставим те же, что и в десятичной системе.

5. Написать первые двадцать чисел натурального ряда по двоичной системе счисления.

6. Найти число, которое по пятиричной системе счисления изображается так: 3204_5.

7. Число baa_{12} обозначить по десятичной системе счисления.

8. Число 1891_{12} представить по десятичной системе счисления.

9. Числа: 3245_7; 3224_5; $3ab_{12}$ представить в виде суммы нескольких слагаемых.

10. Число 234_6 выразить по троичной системе счисления.

11. Какие числа по семиричной системе счисления оканчиваются на нуль, на два нуля, на три нуля и т. д.?

12. Написать по шестиричной системе счисления числа: 6^2; 6^3; 6^4; 6^5.

13. Найти x (основание системы счисления), если $23456_{10} = 125246_x$.

14. Найти x, если $3325_9 = 10103_x$.

15. Что и на сколько больше: единица 3-го разряда пятиричной системы или единица 4-го разряда четверичной системы счисления?

16. Что сделается с цифрами числа 234_5, если это число увеличить в 5 раз? в 25 раз? в 125 раз?

17. Что сделается с числом 2342_5, если вставить между цифрами 3 и 4 один нуль, два нуля?

18. По какой системе счисления число 46 изобразится теми же цифрами, но в обратном порядке?

19. Найти двузначное число, которое по десятичной и четверичной системам записывается одними и теми же цифрами, но в обратном порядке.

20. Число имеет 17 цифр. Каков его высший разряд?

21. Сколько цифр в числе, если наивысшие его единицы сотни секстиллионов?

22. Пишется подряд натуральный ряд чисел по десятичной системе счисления, причём числа не отделяются никакими знаками; сколько цифр потребуется для изображения такого ряда от 1 до 9, до 99, до 999 и т. д.?

23. Пишется подряд натуральный ряд чисел по пятиричной системе счисления, причём числа не отделяются никакими знаками; сколько понадобится цифр для изображения всех чисел, заканчивая двузначными?

24. В книге 300 страниц. Сколько надо отлить цифр, чтобы пронумеровать все страницы?

Каждая цифра не употребляется для нумерации более одного раза.

25. Сколько страниц в книге, если для перенумерования её страниц потребовалась 6681 цифра?

26. В книге по пятиричной системе 1210_5 страниц. Сколько цифр надо отлить, чтобы пронумеровать все страницы по указанной системе?

27. Написать натуральный ряд чисел по десятичной системе счисления; узнать, какая цифра стоит на 18 347-м месте.

28. Пишут все числа от 1 до 999 999. Сколько раз напишется каждая значащая цифра, например 1?

2. ЧЕТЫРЕ ДЕЙСТВИЯ С НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

а) Сложение и вычитание

29. Сложить: 1) $6235_7 + 3463_7$; 2) $1342_5 + 14\,321_5 + 324_5$; 3) $b\,57_{12} + a\,64_{12} + 835_{12}$.

30. Вычесть: 1) $6235_7 - 3463_7$; 2) $5032_9 - 2106_9$; 3) $58742_{12} - 89\,a\,6_{12}$

31. При какой системе счисления справедливо такое равенство: $241_x + 134_x = 430_x$?

32. При какой системе счисления справедливо такое равенство: $236_x - 145_x = 61_x$?

33. Показать, что всякое число можно представить в виде суммы различных степеней числа 2.

34. Найти $x = 23485 - 4328 + 1584 - 3990 - 435$, не выполняя указанных действий вычитания.

35. На окружности расположены три числа. Если передвигаться по окружности в одном и том же направлении, то последовательные суммы чисел, взятых по два, будут 23, 27 и 30. Найти эти числа.

36. Сколько раз можно складывать различные числа, взятые по два, чтобы составилась одна и та же сумма 53?

37. Что сделается с разностью двух чисел, если уменьшаемое будет уменьшено числом, равным найденной разности?

38. На сколько увеличится трёхзначное число, если к нему слева будет приписана цифра 5, влево от неё цифра 3 и влево от последней цифра 2?

39. Шестизначное число написано различными цифрами, а для изображения другого числа те же самые цифры написаны в обратном порядке. Что означает во втором числе цифра, стоящая в первом числе на четвёртом месте?

40. Сколько раз можно вычитать 48 из различных двузначных чисел, чтобы в остатках получались также двузначные числа?

41. Найти суммы четырёх четырёхзначных чисел, если в двух из них сумма единиц каждого разряда равна 8, а в двух остальных сумма единиц каждого разряда равна 9.

42. На сколько увеличится разность двух чисел, из которых уменьшаемое содержит пять цифр, а вычитаемое — четыре цифры, если к каждому из них будет приписана слева цифра 6?

43. Во что обратится разность 26 385 двух пятизначных чисел, если в них будут зачёркнуты крайние цифры справа: 3 в уменьшаемом и 8 в вычитаемом?

44. Найти разность двух чисел, зная, что они содержат одну и ту же значащую цифру, находящуюся в каждом числе три раза, и что в одном числе влево от средней значащей цифры два нуля и вправо от неё три нуля, а в другом числе влево от средней значащей цифры три нуля и вправо от неё два нуля.

45. Сумма, полученная от сложения нескольких чисел, оказалась неверной, потому что в одном из слагаемых цифра 3 поставлена по ошибке на пятом месте, цифра 7 — на четвёртом и цифра 6 — на третьем, а в данном числе цифра 7 стоит на пятом месте, цифра 6 — на четвёртом и цифра 3 — на третьем. Каким образом должно поправить ошибку в полученной сумме?

46. В одном из двух данных чисел недостаёт до 1 сотни тысяч столько, сколько в другом числе недостаёт до 1 десятка тысяч. На сколько первое данное число больше или меньше второго?

47. Что сделается с разностью двух шестизначных чисел, если каждая из цифр, стоящих в уменьшаемом на первом, третьем и пятом местах, а в вычитаемом — на втором, на четвёртом и шестом местах, будет увеличена на 1?

48. По разности двух чисел 2746 найти разность двух других чисел, из которых большее число на 732 меньше уменьшаемого первого вычитания, а меньшее число на 317 больше вычитаемого первого вычитания.

49. Сумма двух чисел больше суммы двух других чисел на 2437 и первое слагаемое большей суммы больше первого слагаемого меньшей суммы на 689. На сколько второе слагаемое большей суммы должно быть больше или меньше второго слагаемого меньшей суммы?

50. Имеется 10 гирь весом 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 *г*. Показать, что с помощью таких гирь можно взвесить любые тяжести, меньшие 1024 *г*.

51. Имеется 5 гирь по 1 *г*, 5 гирь по 10 *г*, 5 гирь по 100 *г* и т. д. Показать, что этими гирями можно взвесить тяжести в какое угодно число граммов.

52. Имеем ряд чисел 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ..., в котором каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предшествующих.

Показать, что

1) сумма n членов ряда, увеличенная на единицу, равна $(n+2)$-му члену того же ряда;

2) сумма членов нечётного порядка равна следующему после последнего чётного порядка члену этого ряда без единицы;

3) сумма членов чётного порядка равна члену, следующему за последним членом этого ряда;

4) сумма членов нечётного порядка без суммы членов чётного, содержащихся внутри первой группы, равна последнему чётному члену без 1.

б) Умножение и деление

53. Умножить: 1) $635_7 \times 215_7$; 2) $3412_5 \times 21_5$; 3) $7062_8 \times 504_8$; 4) $1090_{12} \times 5a_{12}$; 5) $1101_2 \times 11101_2$.

54. Разделить: 1) $33356_7 : 13_7$; 2) $1432013_5 : 443_5$; 3) $110391_{12} : 585_{12}$; 4) $11001_2 : 1000_2$.

55. Выполнить указанные действия, сохраняя данную систему счисления:

$$[(10_7^2 + 13_7^2 + 102_7) : 55_7 + 264_7] \times 37_7.$$

56. Что сделается с произведением 15×26, если увеличить первый множитель на 4 единицы, а второй на 6?

57. Что сделается с произведением 15×26, если уменьшить первый множитель на 4 единицы, а второй на 6?

58. Как изменится произведение двух чисел, если к большему из них a прибавим m единиц, а от меньшего b отнимем m единиц?

59. Сколько получится цифр в произведении двух многозначных чисел: а) если в каждом из них крайняя цифра слева равна 9; б) если эта крайняя цифра равна 2?

60. Каково число цифр в произведении: 1) 4 двузначных чисел? 2) 4 однозначных? 3) 4 трёхзначных?

61. Найти произведение числа 12 345 679 на 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 и указать приём для непосредственного определения произведения.

62. Найти произведение двух чисел 327×875, взяв вместо второго множителя его дополнение.

63. Как должно помножить число 80 203 на пятизначное число, не содержащее нулей, чтобы получилось наименьшее число частных произведений?

64. Чтобы найти произведение двух данных чисел, множимое помножено на 6 и затем найденное произведение вычтено из числа, которое в 100 раз больше этого произведения. Найти множитель.

65. Во сколько раз уменьшится произведение двух данных чисел от уменьшения данного множителя в 35 раз и от замены данного множимого 10 419 числом 453?

66. Как объяснить, что разность двух чисел увеличится вдвое, если каждое из них будет увеличено вдвое?

67. Объяснить, что произведение какого-нибудь числа на 975 можно найти следующим образом: к данному множимому надо приписать справа два нуля, затем полученное число разделить на 4 и, наконец, найденное частное вычесть из произведения данного множимого на 1000.

68. Показать, что сумма всех чисел таблицы Пифагора есть точный квадрат.

√ **69.** Составить таблицу умножения по шестиричной системе.

70. На какие цифры оканчиваются следующие выражения: 1) 176^{19}; 2) 435^{29}; 3) 534^{38}; 4) 319^{18}; 5) $136^{15} \times 785^{8}$?

71. Число 234_5 увеличить в 125 раз, не вычисляя неполных произведений.

72. Возвысить 5 в шестую степень, не прибегая к действию умножения.

73. Не производя умножения, найти сумму $5+5^2+5^3+5^4+ +5^5+5^6$.

74. Если к произведению двух последовательных чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего.

75. Произведение трёх последовательных чисел, увеличенное на среднее из них, даёт куб среднего.

76. Произведение четырёх последовательных чисел, увеличенное на 1, есть точный квадрат.

77. Произведение четырёх последовательных чётных чисел, увеличенное на 16, есть точный квадрат.

78. Чтобы разделить данное число на другое данное число, делимое помножено на 8 и затем найденное произведение разделено на 2000. На сколько следовало по заданию разделить данное делимое?

79. От деления данного числа на другое данное число получилось в частном 457 без остатка. Сколько получится в частном и сколько в остатке от деления данного делимого на число, которое в 10 раз больше данного делителя?

80. От деления данного числа на другое данное число получился остаток и в частном получилось число, содержащее одной цифрой больше числа цифр данного делителя. Почему от деления данного делимого на найденное частное получится тот же самый остаток, который получился от первого деления?

81. Деление данного числа на другое данное число дало остаток, равный найденному частному. Сколько получится в частном и сколько в остатке от деления данного делимого на частное, полученное от первого деления?

82. От деления числа на 204 получился остаток 145. Что сделается с полученным частным и сколько получится в остатке, если данное делимое разделить на 68?

83. Объяснить, что частное, полученное от деления данного числа на другое данное число, не изменяется от увеличения данного делителя на 1, 2, 3, 4 и т. д., если из остатка от деления можно вычитать произведения найденного частного на числа 1, 2, 3, 4 и т. д.

84. Найти частное и остаток от деления 4927 на 3. 5. 8, не отыскивая делителя.

85. Доказать, что всякое нечётное число может быть приведено к одному из следующих видов:

$$8n \pm 1;\ 8n \pm 3.$$

86. Доказать, что всякое натуральное число имеет одну из форм:

$$3n;\ 3n \pm 1.$$

87. Можно ли и на сколько увеличить или уменьшить делимое, чтобы частное не изменилось?

88. При каком условии увеличение делителя на 1 не меняет частного?

89. Сколько единиц можно прибавить к делимому и делителю, чтобы частное не изменилось?

90. Какое наибольшее число, от прибавления которого к делимому частное не изменится?

91. При каком условии делитель и частное могут обменяться местами?

92. Если число N умножить на 31, то оно увеличится на 6600. Найти число N.

93. Найти частное и остаток от деления 2345_6 на 36_{10} кратчайшим способом.

3. ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

94. От деления данного числа на 448 получилось в остатке 252. Разделится ли данное делимое на 28?

95. Число 217 требуется помножить на такое число, чтобы в произведении получилось кратное чисел 5, 7 и 9. Найти это произведение.

96. В таблице умножения найти четыре числа взаимнопростых, из которых каждое должно быть составным числом.

97. На сколько разделится сумма пяти чисел, если одно из них делится на 12, каждое из двух следующих чисел — на 15 и каждое из двух остальных — на 21?

98. Может ли сумма делиться на такое число, на которое не делится ни одно слагаемое?

99. Не производя деления, найти остатки, полученные от деления чисел 63 062, 97 317, 61 793, 813 759 на 4 и на 5.

100. Почему сумма двух чисел делится на их разность, если одно из них на 2 единицы больше другого?

101. Остаток, полученный от деления нечётного числа на число нечётное, должен быть числом чётным, если соответствующее частное — число нечётное, или должен быть числом нечётным, если соответствующее частное — число чётное.

102. Чтобы сумма делилась на 2, достаточно, чтобы каждое слагаемое делилось на 2. Почему это условие только достаточно, а необходимости в нём нет?

103. Если одно из двух слагаемых делится на какое-нибудь число, то для того, чтобы сумма разделилась на то же число, необходимо и достаточно, чтобы другое слагаемое делилось на то же число. Почему это условие и необходимо и достаточно?

104. К числу 6157 приписать справа и слева по одной цифре, чтобы образовалось число, делящееся на 45.

105. На сколько должно делиться каждое из чисел 7368 и 21 636 и на сколько должна разделиться их сумма?

106. Почему два числа 948 и 289 не могут иметь общим делителем число, которое больше 81?

107. Какое требуется условие от числа, оканчивающегося тремя нулями, чтобы оно могло разделиться на 625?

108. Найти два числа, которые делились бы на их разность.

109. Дана сумма 10 944 чисел 2709, 5103, 3132, из которых каждое делится на 9. В данных слагаемых требуется сделать такие поправки, не изменяя суммы, чтобы каждое из образовавшихся чисел разделилось на 8.

110. От деления данного числа на 8 получилось в остатке 4, и деление найденного частного на 3 совершилось без остатка. Почему от деления данного числа на произведение данных делителей $8 \times 3 = 24$ получится тот же самый остаток 4?

111. Деление данного числа на 12 совершилось без остатка, и от деления найденного частного на 8 получилось в остатке 2. Объяснить, что от деления данного числа на произведение данных делителей $12 \times 8 = 96$ в остатке получится произведение остатка 2 на 12.

112. Почему разность двух чисел делится на 9, если эти числа изображены одними и теми же цифрами, но расположенными в одном числе не в том же самом порядке, в каком они поставлены в другом числе?

113. Зная, что $1001 = 7 \times 11 \times 13$, вывести признак делимости на 7, 11 и 13.

114. Признак делимости на 37 состоит в том, что данное число делится от правой руки на грани по 3 цифры в каждой; если при этом сумма чисел, получившихся в этих гранях, разделится на 37, то и данное число разделится на 37. Доказать.

115. Найти каноническое разложение чисел 1000; 588 000; 3780.

116. Составить таблицу простых чисел, меньших 200.

117. Пары простых чисел, отличающихся друг от друга на 2, называются „близнецами". Сколько таких пар от 1 до 200?

118. Чтобы узнать, есть ли данное число простое или составное, достаточно делить его на простые числа 2, 3, 5, 7, ... в том порядке, в котором эти числа следуют одно за другим, и продолжать эти пробы до тех пор, пока в частном не получится число, меньшее делителя; если ни одно из этих делений не совершится без остатка, то данное число есть простое. Узнайте, будет ли число 983 простое или составное?

119. Всякое достаточно большое нечётное число есть сумма трёх простых чисел. Убедитесь в этом на примерах.

120. Всякое простое число, кроме 2 и 3, имеет вид $6n \pm 1$.

121. Доказать, что число 144 будет точным квадратом во всякой системе счисления.

122. Доказать, что число 1331 будет точным кубом во всякой системе счисления.

123. Найти по двоичной системе счисления признаки делимости на 2, 4, 8.

124. Вывести признак делимости на 3 в семиричной системе счисления.

125. Вывести признак делимости на 4 и 6 в пятиричной системе счисления.

126. Показать, что два последовательных нечётных числа суть числа первые между собой.

127. Найти всех делителей числа 180.

128. Найти число делителей чисел 12 и 931.

129. Найти сумму всех делителей числа 12 600.

130. Числа, равные сумме своих настоящих (правильных) делителей, называются „совершенными".

Настоящим, или правильным делителем числа n называется всякий его делитель, отличный от самого числа n. Проверить, что числа 6, 28, 496, 8128 совершенные.

131. Два числа m и n называются „дружественными", если каждое из них равно сумме правильных делителей другого. Показать, что два числа 284 и 220 будут дружественными.

132. Найти всех общих делителей чисел 990 и 630.

133. Узнать, получится ли число простое или составное от сложения простых чисел, которые меньше 100 и оканчиваются цифрой 7, с числами, которые меньше 100 и оканчиваются цифрой 9.

134. Применяя алгоритм Евклида, найти общий наибольший делитель чисел 2993219 и 1114417.

135. Чтобы найти последовательным делением общий наибольший делитель чисел 17595 и 9660, они заменены для сокращения действий числами 1173 и 644, для которых найден общий наибольший делитель. Чему равен общий наибольший делитель данных чисел?

136. Сколько раз общий наибольший делитель двух чисел содержится в каждом из них, если при последовательном делении получились по порядку частные 1, 1, 2, 2 и соответствующие им остатки 720, 288, 144 и нуль?

137. При отыскании общего наибольшего делителя двух чисел последовательным делением получились следующие частные: 1, 3, 2, и найдено было, что общий наибольший делитель равен 5. Найти эти числа.

138. Найти два числа, общий наибольший делитель которых равен 24, а общее наименьшее кратное равно 2496.

139. Найти два числа, произведение которых равно 840, а их общий наибольший делитель равен 2.

140. Найти два числа, зная их произведение 12600 и наименьшее общее кратное 6300.

141. Найти два числа, зная их отношение $\frac{5}{9}$ и общий наибольший делитель 28.

142. Найти два числа, зная их отношение $\frac{11}{30}$ и наименьшее общее кратное 3960.

143. Найти два числа, зная их сумму 168 и общий наибольший делитель 24.

144. Найти четырёхзначные числа, которые одновременно делятся на 2, 3, 4, 5, 6 и 7.

145. Найти двузначное число, которое имеет наибольшее число делителей.

146. Составить три числа из простых делителей 2, 3, 5 таким образом, чтобы каждое число содержало 24 всевозможных делителя.

147. Чтобы найти наименьшее кратное трёх чисел, надо разделить каждое из них на их общий наибольший делитель, потом найти наименьшее кратное полученных частных и помножить общий наибольший делитель на найденное наименьшее кратное. На примере показать, почему образовавшееся произведение будет наименьшим кратным данных чисел.

148. Найти наименьшее число, которое имело бы 36 делителей.

149. Найти наименьшее число, которое имело бы 120 делителей.

150. Известно, что числовая функция $[x]$ представляет наибольшее целое число, не превосходящее x, например:

$$\left[\frac{40}{3}\right]=13; \quad \left[\frac{40}{9}\right]=4 \text{ и т. д.}$$

Показатель, с которым данное простое число p входит в произведение n, равен:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\dots$$

Найти показатель, с которым число 5 входит в произведение 42, т. е. 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 42.

151. Найти каноническое разложение числа 100.!

152. Показать, что произведение 13 последовательных натуральных чисел делится на произведение 19 простых чисел, меньших 13.

153. Показать, что произведение 10 последовательных натуральных чисел имеет 270 делителей.

154. Найти число чисел меньших 60 и взаимно простых с ним.

155. Проверить на примерах теорему Вильсона: „Если p есть число простое, то число $1, 2, 3,\dots (p-1)+1$ делится на p; если же p не есть число простое, то названное число не делится на p".

156. Проверить на примерах теорему Ферма: „Если a натуральное число, не делящееся на простое число p, то разность $a^{p-1}-1$ всегда разделится на p".

157. Проверить на примерах теорему Эйлера: „Если a и b два каких угодно взаимно простых числа и k — число целых чисел, меньших b и взаимно простых с ним, то a^k-1 делится на b".

158. Произведение двух последовательных чётных чисел делится без остатка на 8. Доказать это.

159. Доказать, что если n число простое, отличное от 2 и 3, то разность n^2-1 делится на 24.

160. Если из двух натуральных чисел одно даёт при делении на 3 остаток 1, другое остаток 2, то их произведение даёт при делении на 3 остаток 2.

161. Если число делится на 5, то его квадрат, увеличенный или уменьшенный на 1, делится на 5.

162. Произведение трёх последовательных чисел делится на 6.

163. Произведение четырёх последовательных чисел кратно 24.

164. Произведение пяти последовательных натуральных чисел делится на 120.

165. Разность между кубом какого-либо целого числа и самим числом делится на 6.

166. При всяком n число $n(n+1)(2n+1)$ всегда делится на 6.

167. Разность между данным числом и числом обращённым (написанным теми же цифрами, но в обратном порядке) делится на 9.

168. Сумма квадратов двух чисел, взаимно простых с тремя, не может делиться на 3.

169. Число a^7-a всегда делится на 42.

170. Если n число взаимно простое с 6, то n^2-1 делится на 24.

171. При всяком целом значении n число вида n^4+6n^3+ $+11n^2+6n$ делится на 24 без остатка.

172. Показать, что 100-я степень всякого целого числа либо делится на 125, либо при делении на 125 даёт в остатке 1.

173. Доказать, что если n есть целое число, взаимно простое с 35, то число вида $(n^4-1)(n^4+15n^2+1)$ делится на 35 без остатка.

174. Показать, что при всяком нечётном значении n число вида $n^4+7(7+2n^2)$ кратно 64.

175. Показать, что при всяком n число $n(n^2+5)$ делится на 6.

176. Доказать, что необходимое и достаточное условие делимости целого числа n на 17 заключается в том, чтобы сумма удвоенной цифры единиц и утроенного числа десятков числа n делилась на 17.

177. Доказать, что при n целом число вида $7^{n+2}+8^{2n+1}$ имеет общим наибольшим делителем число 57.

178. Доказать, что при n целом и неравном нулю число вида $3^{2n+2}\times 4+32n-36$ делится на 64.

179. Доказать, что при n целом число вида $5^{2n+1}+3^2\times 2^{n+1}\times$ $\times(1+18^{n-1})-13^n$ делится на 46.

180. При каком наименьшем значении n число $2^{2^n}+1$ есть число составное?

181. Проверить на примерах, что если число 2^n+1 простое, то n есть степень 2.

182. Каково свойство чисел, которые при делении на 25 дают остаток 7?

183. Найти общий вид чисел, которые при делении на 3, на 5 и на 7 давали бы соответственно остатки 2, 4 и 6.

184. Число $N=42x4y$ делится на 72. Найти его цифры.

185. Число $N=13xy45z$ делится на 792. Найти его цифры.

186. Найти число $N=1234xy$ с условием, чтобы это число делилось на 8 и на 9.

4. ДРОБНЫЕ ЧИСЛА

187. Найти дробь, равную $\frac{5}{7}$, чтобы сумма числителя и знаменателя её равнялась 48.

188. Не производя вычитания, узнать, будет ли разность дробей $\frac{19}{21}$ и $\frac{8}{15}$ больше или меньше разности дробей $\frac{19}{21}$ и $\frac{9}{16}$.

189. Проверить на примерах, что если прибавить одно и то же целое число к числителю и знаменателю дроби, то получим новую дробь, величина которой лежит между данной дробью и 1.

190. Найти такие правильные дроби, из которых каждая от уменьшения её числителя и знаменателя на 1 обращается в $\frac{1}{2}$.

191. Найти такие правильные дроби, чтобы каждая из них от увеличения числителя и знаменателя на 1 обратилась в $\frac{1}{4}$.

192. Если правильная дробь $\frac{a}{b}$ несократима, то дробь, дополняющая её до 1, т. е. $\frac{b-a}{b}$, также несократима.

193. Если дробь $\frac{a}{b}$ несократимая, то $\frac{a+b}{ab}$ и $\frac{a-b}{ab}$ также дроби несократимые.

194. Проверить на примере, что дробь, числитель которой равен сумме числителей данных дробей, а знаменатель — сумме их знаменателей, больше меньшей и меньше большей из этих дробей.

195. Какие числа можно прибавить к числителю и знаменателю дроби, не изменяя её величины?

196. Почему при любом целом n выражение $\frac{10^n+2}{3}$ равно целому числу?

197. Сумма двух несократимых дробей только тогда может равняться целому числу, когда дроби имеют одинаковый знаменатель.

198. Дробь $\frac{2n+1}{3n+1}$ несократима при всяком целом n.

199. Дроби $\frac{n-6}{15}$ и $\frac{n-5}{24}$ одновременно не будут равны целым числам ни при каком целом значении n.

200. Сумма данной дроби $\frac{a}{b}$ и обращённой $\frac{b}{a}$ всегда больше 2.

201. Какую часть вычитаемого составляет разность двух чисел, если вычитаемое равно $\frac{19}{30}$ уменьшаемого?

202. Найти такое смешанное число, чтобы от деления его целого числа на $\frac{11}{200}$ получилось в частном 200, а от деления его дроби на $\frac{11}{200}$ получилось в частном 5.

203. Какую часть уменьшаемого составляет разность двух чисел, если вычитаемое равно $\frac{12}{17}$ этой разности?

204. Найти такую дробь, чтобы от прибавления её к сумме двух правильных дробей получилось в сумме целое число.

205. Объяснить, что от умножения правильной дроби на число, которое единицей больше знаменателя данной дроби, получится смешанное число, дробь которого равна данной дроби, а целое равно её числителю.

206. Почему от умножения дроби $\frac{11}{15}$ на $1\frac{1}{4}$ получится в произведении столько, сколько получится от сложения дробей $\frac{11}{15}$ и $\frac{11}{60}$?

207. Каким должен быть множитель относительно множимого, чтобы произведение двух дробей равнялось $\frac{1}{5}$?

208. Почему неправильная дробь от уменьшения её числителя на число, равное разности её членов, обратится в единицу? Проверить на числовом примере.

209. Найти такие неправильные дроби, из которых каждая от уменьшения её числителя и знаменателя на единицу обратилась бы в 3 единицы.

210. В каком случае возможно при умножении целого числа на правильную дробь разделить множимое на её знаменатель и потом найденное частное вычесть из множимого?

211. В каком случае разность двух дробей, у которых одинаковые числители, выразится дробью, числитель которой равен числителю данных дробей?

212. Почему от деления дроби на дробь получится в частном дробь, имеющая числителем единицу, если знаменатель делимого делится на знаменатель делителя и числитель делителя делится на числитель делимого?

213. Чему равняется сумма трёх дробей, числители которых равны, если знаменатель первой дроби втрое меньше знаменателя второй дроби и знаменатель второй дроби втрое меньше знаменателя третьей дроби?

214. В каком случае можно при делении целого числа на правильную дробь разделить делимое на числителя данной дроби и полученное частное прибавить к данному делимому?

215. Почему частное от деления дроби на дробь увеличится на число, равное знаменателю данного делителя, если числитель данного делимого будет увеличен на единицу?

216. Почему разность двух дробей равна дроби, у которой числитель есть разность между членами вычитаемой дроби, а знаменатель равен общему знаменателю данных дробей, если каждый из членов уменьшаемой дроби на единицу больше соответствующего ему члена вычитаемой дроби?

217. Найти такие неправильные дроби, чтобы от деления числа $35\frac{5}{9}$ на каждую из них получалось в частном целое число.

218. Может ли разность двух дробей равняться их произведению? Если может, то какой вид должны иметь дроби?

219. Может ли сумма двух дробей равняться их произведению? Если может, то какой вид должны иметь дроби?

220. Показать, что если сумма двух дробей равняется единице, то квадрат первой, сложенный со второй дробью, равняется квадрату второй, сложенному с первой дробью.

221. Всякая правильная дробь может быть представлена в виде суммы дробей с числителями, равными единице. Привести примеры.

222. Сумма или разность двух чистых периодических дробей есть ли периодическая дробь?

223. Произведение двух периодических чистых дробей есть ли периодическая дробь?

224. Всегда ли частное от деления чистых периодических дробей есть чистая периодическая дробь?

225. Если в дроби 0,213213213... принять за период сначала 213, а потом 213 213, то пределы этой дроби, выраженные для обоих случаев, т. е. числа $\frac{213}{999}$ и $\frac{213213}{999999}$, равны. Доказать это.

226. Дана дробь 0,52375375375...; если в ней за непериодическую часть принять 52, а потом 52375 или сначала 52, а потом 5237, то во всех случаях пределы дроби будут равны, т. е.

1) $$\frac{52375-52}{99900}=\frac{52375375-52375}{99900000};$$

2) $$\frac{52375-52}{99900}=\frac{5237537-5237}{9990000}.$$

Доказать это.

227. Знаменатель несократимой дроби, обращающейся в чистую периодическую дробь, всегда есть число первое с 10. Доказать это.

228. Показать, что всякое целое число N есть делитель числа, выраженного цифрой 9, повторенной несколько раз и сопровождаемой несколькими нулями.

229. Указать, каким свойством обладают знаменатели обыкновенных дробей, которые обращаются в чистые периодические дроби с 1, 2, 3, ... , n цифрами в периоде.

230. Если при обращении обыкновенной несократимой дроби $\frac{a}{b}$ в десятичную получается чистая периодическая дробь, то в периоде её содержится столько цифр, сколько их в наименьшем из чисел ряда $10-1$, 10^2-1, 10^3-1, ..., 10^n-1, делящихся на знаменатель данной дроби.

Проверить эту теорему для дробей: $\frac{8}{37}$; $\frac{20}{13}$; $\frac{3}{7}$.

231. Если знаменатель несократимой дроби $\frac{a}{b}$ может быть представлен в виде $p \times 2^m \times 5^n$, где $p \geqslant 3$ и не делится ни на 2, ни на 5, а один из показателей m или n может быть равен нулю, то при обращении данной дроби в десятичную получается смешанная периодическая дробь, в которой число цифр, стоящих между запятой и периодом, равно наибольшему из показателей m и n, а число цифр, стоящих в периоде, столько, сколько цифр в наименьшем из чисел ряда $10-1$, 10^2-1, ..., 10^q-1, делящихся на число p.

Проверить эту теорему для дробей: $\frac{9}{28}$; $\frac{53}{48}$.

232. Найти знаменатели обыкновенных несократимых дробей, которые обращаются в смешанную периодическую дробь, имеющую: 1) одну цифру в периоде и одну цифру до периода; 2) две цифры в периоде и две цифры до периода, и т. д.

233. Две обыкновенные несократимые дроби имеют одинаковый знаменатель, не делящийся ни на 2, ни на 5. Что можно сказать о результатах обращения этих дробей в десятичные дроби?

234. Если обыкновенная несократимая дробь, знаменатель которой есть число простое, обращается в периодическую дробь с чётным числом цифр в периоде, то сумма цифр, занимающих в каждом полупериоде место одного и того же порядка, равна 9.

Проверить это для дробей: $\frac{3}{7}$; $\frac{2}{13}$.

235. Если знаменатель обыкновенной несократимой дроби есть число взаимно простое с 11, то в том случае, когда при обращении этой дроби в периодическую в периоде получается чётное число цифр, период делится на 11.

Проверить это для дробей: $\frac{5}{7}$; $\frac{9}{13}$.

236. Выразить конечные десятичные дроби: 0,7; 1,26; 0,134; 2,30 в виде периодических дробей.

237. Известно, что $0,999\ldots = 1$, с другой стороны, каждая десятичная дробь, целая часть которой есть нуль, меньше 1. Объяснить это видимое противоречие.

238. Даны две пары дробей: $\frac{3}{11}$ и $\frac{8}{11}$; $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{7}$. Показать, что сумма цифр одинакового порядка, получаемых в частном при обращении их в периодическую дробь, всегда равна 9.

239. Чтобы получить период дроби $\frac{1}{7}$, надо помножить числитель и знаменатель этой дроби на 2; приписав справа к знаменателю полученной таким образом дроби её числитель, получим три первые цифры периода. Вычитая затем по порядку каждую из этих трёх цифр порознь из 9, получим остальные три цифры периода.

Проверить это.

240. Чтобы получить период какой-нибудь из дробей: $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{7}$ и $\frac{6}{7}$, достаточно написать цифры периода дроби $\frac{1}{7}$ в круговом порядке, от левой руки к правой, начиная с цифры, следующей в этом периоде за последней цифрой произведения знаменателя, обращаемой в десятичную дроби на её числитель.

241. При обращении дроби вида $\frac{1}{n}$, где n — простое число, в десятичную получается чистая периодическая дробь и в периоде будет $(n-1)$ цифра.

Проверить это для дробей: $\frac{1}{17}$; $\frac{1}{19}$; $\frac{1}{29}$.

242. Если обратить $\frac{1}{17}$ в десятичную дробь, то получим дробь с периодом в 16 цифр; показать, что цифры второй половины периода дополняют до 9 цифры первой его половины.

243. Показать, что при всяком целом n дробь, равная сумме дробей $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$, обращается в смешанную периодическую дробь.

244. По какой системе счисления число 45 изобразится в виде 63,?

245. Найти число N, если по пятиричной системе $N=0,(03)_5$.

246. Найти число N, если по восьмиричной системе счисления $N=0,56(57)_8$.

247. Обратить дроби $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{7}$ в периодические, написанные по шестиричной системе счисления.

248. Дроби $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{9}$; 0,3 записать по шестиричной и восьмиричной системам счисления.

249. Представить дробь $\frac{117}{192}$ в виде дроби, аналогичной десятичной, но написанной по двенадцатиричной системе счисления.

250. Выполнить сложение дробей, написанных:

1) по троичной системе: $112,122+22,12$;
2) по пятиричной системе: $14,32+0,4312$.

251. Выполнить вычитание дробей, написанных:

1) по семиричной системе: $61{,}124 - 35{,}536$;
2) по двоичной системе: $100{,}1001 - 11{,}0111$.

252. Выполнить умножение дробей, написанных:

1) по восьмиричной системе: $5{,}31 \times 7{,}24$;
2) по девятиричной системе: $2{,}121 \times 1{,}212$.

253. Выполнить деление дробей, написанных:

1) по пятиричной системе: $31{,}32212 : 4{,}32$;
2) по восьмиричной системе: $0{,}10377 : 0{,}23$.

5. СМЕШАННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

254. Сумма шести двузначных чисел, образованных тремя различными цифрами, причём ни одна не нуль, равна взятой 22 раза сумме этих цифр, например: 4, 3, 6; $43 + 46 + 34 + 36 + 64 + 63 = 286 = 22 \times (4 + 3 + 6)$. Доказать это.

255. Берут несколько цифр, удваивают первую цифру, к результату прибавляют 5, сумму умножают на 5, к полученному произведению прибавляют вторую цифру, потом полученную сумму умножают на 10 и к произведению прибавляют третью цифру; затем умножают полученную сумму снова на 10 и к произведению прибавляют четвёртую цифру и т. д. столько раз, сколько взято цифр. Доказать, что результат таким образом полученный и уменьшенный на 25 (когда две цифры взято), на 250 (когда три цифры взято), на 2500 (когда четыре цифры взято) и т. д., смотря по числу данных цифр, будет равен числу, образованному данными цифрами.

Например, даны цифры 6, 1, 2, 3. Имеем:

1) $(2 \times 6 + 5) \times 5 + 1 = 86$; $86 - 25 = 61$;

2) $[(2 \times 6 + 5) \times 5 + 1] \times 10 + 2 = 862$; $862 - 250 = 612$ и т. д.

256. Если из трёхзначного числа, написанного по какой-нибудь системе счисления с основанием x, вычесть число, написанное по той же системе теми же цифрами, но в обратном порядке, то средняя цифра разности равна $x - 1$, а сумма остальных также равна $x - 1$.

Проверить это для числа, написанного по восьмиричной системе счисления.

257. Сколько всего чисел из n цифр в системе счисления с основанием a? Проверить это для: 1) $n = 4$; $a = 3$; 2) $n = 2$; $a = 10$; 3) $n = 3$; $a = 10$.

258. Доказать, что при основании системы счисления, равном a, произведения $a - 1$ на два числа (кроме 1 и a), сумма которых равна $a+1$, пишутся одними и теми же цифрами, но в обратном порядке.

259. Всякое число N вида $\frac{n(n+1)}{2}$ (n — целое) есть число целое и не может оканчиваться справа ни на одну из цифр 2, 4, 7, 9.

260. Какие числа при делении на a дают частное, равное остатку? Привести примеры.

261. При делении двух чисел получается частное 356 и остаток 4623. На сколько единиц можно одновременно увеличить делимое и делитель, чтобы частное не изменилось?

262. Делимое равно 802, частное 14. Найти делители и остаток.

263. На какое число n надо помножить делимое A при делителе d, чтобы частное оказалось помножено на n?

Проверить для $A=1934$, $d=212$.

264. Если a и b — целые числа, то при всяком целом n частные от деления $a-1$ на b и от деления $(ab^{n-1}-1)$ на b^n равны.

265. В книге, состоящей из двух частей, всего 950 страниц, в первой части 380 страниц. Сколько надо отлить цифр для пронумерования страниц книги, если страницы каждой части начать пронумеровывать с 1, и сколько, если две части соединить в одну общую нумерацию?

266. Во всякой системе счисления число 10101 делится на 111. Написать частное от деления этих чисел, зная основание системы a. Проверить для $a=5$ и $a=2$.

267. Число N, написанное по двоичной системе счисления, имеет 8 цифр. Сколько будет в нём цифр при двенадцатиричной системе счисления?

268. Показать, что числа $1\times9+2$; $12\times9+3$; $123\times9+4$; ...; $123456789\times9+10$ пишутся только цифрой 1.

Проверить это для системы счисления с основанием, равным a.

269. Найти такие числа, квадраты которых по всякой системе счисления с основанием, большим 4, напишутся одинаково.

270. При всякой системе счисления разность между числом, цифры которого возрастают слева направо на единицу, и числом обращённым есть величина постоянная. Проверить на примерах для десятичной и пятиричной систем счисления.

271. Доказать, что квадрат нечётного числа есть число, кратное 8, увеличенное на 1.

272. Сумма двух нечётных последовательных чисел делится на 4 и, обратно, всякое число, делящееся на 4, есть сумма двух нечётных последовательных чисел.

273. Найти трёхзначное число N, которое делит число цифр, полученных при записи натурального ряда чисел от 1 до N.

274. Показать, что такого числа не существует, которое при делении на 15 давало бы в остатке 6, а при делении на 24 давало бы в остатке 5.

275. Каково наименьшее из чисел, которое при делении на 6, 8, 9 и 12 даёт в остатке 4?

276. При каком условии квадрат числа, увеличенный на 5, даёт число, кратное 7?

277. Число вида $a^6 - b^6$ делится на 9, если числа a и b не делятся на 3.

278. В числе $2x78$ найти цифру x, зная, что число делится на 17.

279. Найти признаки делимости на 2, 3, 4 в системе счисления с основанием 6.

280. Число N делим на грани по 3 цифры в каждой, начиная справа, последняя грань может иметь две или одну цифру.

Показать, чтобы число N делилось на 37, необходимо и достаточно, чтобы сумма чисел, образованных этими гранями, делилось на 37.

281. Найти признаки делимости на $x-1$ и $x+1$ в системе счисления с основанием x.

282. Если к числу с чётным числом цифр прибавить число, образованное из тех же цифр в обратном порядке, получится сумма, кратная 11.

283. Показать, что при n целом число вида $10^n-(9n+1)$ делится нацело на 81.

284. Число вида $3^{2n+1}+2^{n+2}$ делится на 7.

285. Число вида $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ делится на 17.

286. Как надо выбрать n, чтобы 10^n-1 делилось на 81.

287. Найти остаток от деления на 11 числа $(4362)^{8275}$.

288. Найти остаток от деления на 13 числа $N=3012^{93}\times \times 163034^{39}\times 4^{67}$.

289. Если $a^2+b^2=c^2$, то ab делится на 6.

290. Если разделить 4373 и 826 на одно и то же число, получим 8 и 7 в остатках. Какое это число?

291. Три события происходят периодически — одно через 15 дней, другое через 22 дня, третье через 36 дней. Они произошли одновременно в воскресенье. Через сколько дней они произойдут опять вместе в воскресенье?

292. Доказать, что при любом целом n числа $a=2n+1$ и $b=\frac{n(n+1)}{2}$ взаимно простые между собой.

293. Доказать, что наибольший общий делитель чисел a и b, такой же, как и для чисел $A=5a+3b$ и $B=13a+8b$.

294. Показать, что при нахождении наибольшего общего делителя числа N и произведения $P=ABCD$ можно заменить один или несколько сомножителей произведения остатками от их деления на N.

295. Найти все числа N из трёх цифр, делящиеся одновременно на 9 и на 11.

296. Чтобы число N делилось на 17, необходимо и достаточно, чтобы разность между упятирённой цифрой единиц и числом его десятков делилась на 17.

297. Если целое число $A = 100a + 10b + c$ делится на 21, то и число $B = a - 2b + 4c$ делится на 21.

298. Если число p взаимно простое с 5, то число $N = p^{8n} + 3p^{4n} - 4$ делится на 5.

299. Найти двузначное число, которое равно утроенному произведению его цифр.

300. Найти наибольший общий делитель чисел 2520 и $119 \times 1816 \times 549$, не вычисляя указанного произведения и не разлагая на простые множители.

301. Найти наименьшее число, которое при делении на 29 даёт остаток 5 и при делении на 31 даёт остаток 28.

302. Доказать, что квадрат простого числа, кроме 2 и 3, равен кратному 24, увеличенному на 1.

303. Сумма квадратов трёх простых чисел, бо́льших 3, не есть простое число.

304. Наибольший общий делитель двух чисел один и тот же, что одного из них и их суммы.

305. Доказать, что наибольший общий делитель двух чисел равен наибольшему общему делителю их суммы и их наименьшего общего кратного.

306. Найти два числа, зная их сумму $S = 192$ и их наибольший общий делитель $d = 24$.

307. Найти два числа, зная их произведение 51840 и их наименьшее общее кратное 2160.

308. Найти два числа a и b, наибольший общий делитель которых равен 36, а наименьшее общее кратное равно 756.

309. Найти два числа, зная их сумму 4380 и их наименьшее кратное 12600.

310. Найти два целых числа a и b, зная, что разность между их наименьшим общим кратным и наибольшим общим делителем равна 18.

311. Наименьшее общее кратное чисел a и b равно 60; $a = 12$; найти b.

312. Найти два взаимно простые числа p и q таких, чтобы сумма всех делителей числа $N = 2^5 \times p \times q$ равнялась утроенному этому числу.

313. Найти наименьшее число, имеющее 9 делителей.

314. Найти два взаимно простых числа p и q, зная, что сумма делителей числа $N = 2^7 \times p \times q$ равна $\frac{85}{28}$ этого числа.

315. Число $N=a^{\alpha}\times b^{\beta}\times c^{\gamma}$. Если разделить N на a, то число всех делителей числа N уменьшится на 63; если число N разделить на b, то число всех делителей уменьшится на 45, и если число N разделить на c, то число всех делителей его уменьшится на 35. Найти показатели α, β, γ.

316. Найти шестизначное число N, зная, что его произведение на 5 получится, если переместить крайнюю правую цифру числа N на первое место слева, не трогая остальных цифр.

317. Какой наибольший показатель числа, например 7, которое делит произведение тысячи последовательных чисел, т. е. 1, 2, 3, 4, 5, . . . , 999×1000? Найти высшую степень числа 3, которая делит это же произведение.

318. Разложить на простые множители произведение двадцати первых чисел 1, 2, 3, . . . , 19, 20, не вычисляя произведения.

319. Каким числом нулей оканчивается произведение первых 30 целых чисел.

320. Найти число, зная, что оно имеет 63 делителя и что сумма этих делителей равна 51181.

321. Найти сумму показателей простых сомножителей, которые входят в делители числа $N=a^{\alpha}\times b^{\beta}\times c^{\gamma}\times\ldots\times l^{\lambda}$, где a, b, c, . . . l — простые числа.

322. Доказать, что во всякой системе счисления с основанием бо́льшим 5 число $N=123454321$ есть полный квадрат.

323. Если сумма двух целых чисел оканчивается на 0, то квадраты этих чисел оканчиваются одной и той же цифрой.

324. Произведение четырёх последовательных чисел, увеличенное на 1, есть квадрат.

325. Число, оканчивающееся на 5, может быть кубом только тогда, когда цифра десятков 2 или 7.

326. Если целое число a оканчивается на 6 и при делении на 3 даёт в остатке 1, то число вида $(a-1)^2\times(a^2-2a)\times(a^3-4a)$ делится на 43 200.

327. Складывая последовательно одно, два, три и т. д. числа натурального ряда, начиная с первого, получим числа: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, ...

Эти числа имеют название „треугольные числа". Доказать, что всякое треугольное число, помноженное на 8 и увеличенное на 1, есть точный квадрат.

328. Доказать, что сумма двух треугольных последовательных чисел есть точный квадрат.

329. Если напишем ряд чисел 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, . . . , из которых каждое на 3 единицы больше предшествующего, и из этих чисел составим новый ряд чисел, складывая одно, два, три и т. д. числа, начиная с первого, то получим ряд чисел 1, 5, 12, 22, 35, 51, ... Числа этого ряда называются пятиугольными. Общий вид пятиугольных чисел $\frac{3K^2-K}{2}$ при $K>0$.

Доказать, что если сложить два последовательных пятиугольных числа, получим сумму трёх треугольных чисел или сумму трёх квадратов.

330. Найти все трёхзначные числа $N=xyz$, удовлетворяющие условию: $x=z$ и число N делится на 3 и на 5.

331. Выразить в виде теоремы следующее тождество:

$$n^6+n^5=\frac{(n^2+n)(n^2+n-1)}{2}+\frac{(n^3+n^2)(n^3+n^2-1)}{2}+$$
$$+\frac{(n^3-n)(n^3-n-1)}{2}.$$

332. Показать, что дроби $\frac{41}{99}$; $\frac{4141}{9999}$; $\frac{414141}{999999}$ равны.

333. Показать, что дроби $\frac{27425-27}{99900}$ и $\frac{27425425-27425}{99900000}$ равны.

334. Составить правильные несократимые дроби с знаменателем меньшим 6 и расположить в порядке их величины.

335. Уменьшить дробь $\frac{275}{289}$ на $\frac{7}{24}$ её величины, преобразовывая только знаменатель.

336. Показать, что если сумма двух несократимых дробей есть целое число, знаменатели этих дробей равны.

337. Вывести правило, как находить наибольшую дробь с числителем 1, которая меньше данной правильной дроби $\frac{a}{b}$. Рассмотреть частный случай $\frac{a}{b}=\frac{7}{22}$ и разложить $\frac{7}{22}$ на сумму убывающих дробей с числителем 1.

338. Дробь $\frac{19}{31}$ представить в виде суммы дробей, у которых числитель 1.

339. Какие целые числа a, b и c удовлетворяют равенству $\frac{a}{b}\times c=\frac{a}{b}+c$? Привести примеры.

340. Найти две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{a_1}{b_1}$, чтобы их сумма равнялась произведению. Привести числовые примеры.

341. Показать, что $\frac{n}{2n+1}$ несократимая дробь.

342. Даны три дроби $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{7}$. Найти равные им дроби такие, чтобы суммы членов их были равны и имели возможно меньшее значение.

343. Даны три несократимые дроби $\frac{a}{b}$, $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$. Найти равные им дроби такие, чтобы суммы членов их были равны и имели возможно меньшие значения.

344. Даны две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{m}{n}$. Найти дробь, равную второй дроби, члены которой могут быть получены из членов первой дроби посредством увеличения или уменьшения на одно и то же число.

Пример: $\frac{a}{b}=\frac{13}{103}$; $\frac{m}{n}=\frac{8}{68}$.

345. Показать, что сумма дробей $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n+2}$, $\frac{1}{n+3}$, ..., $\frac{1}{2n}$, где n — целое число, больше $\frac{1}{2}$.

346. Найти два целых числа, сумма обратных чисел которых равна 1.

347. Найти три целых числа, сумма обратных чисел которых равна 1.

348. Найти несократимую дробь, зная, что произведение её членов равно 550 и что она может быть выражена конечной десятичной дробью.

349. Найти наименьшую десятичную дробь, которая при делении на каждую из дробей $\frac{16}{75}$ и $\frac{4}{15}$ даёт целые частные.

350. Какое из чисел больше: $A=4+\frac{5}{8}+\frac{6}{8^2}+\frac{3}{8^3}+\frac{7}{8^4}$ или $B=4+\frac{5}{8}+\frac{5}{8^2}+\frac{7}{8^3}+\frac{6}{8^4}$?

351. Найти знаменатель обыкновенной несократимой дроби, которая при обращении в десятичную даёт чистую периодическую с периодом в четыре цифры.

352. Найти число несократимых дробей меньших 1, которые могут обращаться в смешанные периодические дроби, имеющие одну цифру до периода и две цифры в периоде.

353. Показать, что если обратить в десятичные дроби $\frac{a}{7}$ и $\frac{a}{13}$ и обозначить через p и p_1 два периода, то $\frac{p}{p_1}=\frac{13}{7}$.

354. Найти обыкновенную дробь $\frac{a}{b}$, которая есть квадрат и обращается в чистую периодическую дробь с периодом в одну цифру.

355. Какое наименьшее число, на которое надо помножить 7, чтобы произведение состояло только из цифры 3?

356. Всякое целое число A — делитель числа, выраженного одной или несколькими цифрами 9 с одним или несколькими нулями.

357. Разложить $\frac{971}{2592}$ на сумму дробей, знаменатели которых есть степень 6 и числители меньше 6.

358. Разложить $\frac{1237}{15625}$ на сумму дробей, знаменатели которых есть степень 5.

359. Доказать, что при любом целом значении a число a^3-a делится на три.

360. Показать, что числа вида p^4+4, кроме 5, суть числа составные.

361. Если p и q — простые числа бо́льшие 3, то p^2-q^2 делится на 24. Доказать это.

362. Найти числа, из которых каждое имело бы 42 делителя и простыми делителями которых были бы числа 2, 3 и 7.

363. Найти два числа, у которых по 21 делителю и простыми делителями которых служат числа 5 и 7.

364. Общий наибольший делитель трёх чисел равен 32. Числа относятся между собой как $0,(3):1\frac{1}{2}:0,1(6)$. Найти числа.

365. Если число p простое и больше 3, то число $4p^2+1$ может быть представлено в виде суммы трёх квадратов.

366. Каждое простое число может быть только одним способом представлено в виде разности двух квадратов.

367. Произведение всех делителей числа N равно $N^{\frac{1}{2}n}$, где n — число всех делителей N. Проверить это для чисел 12; 15; 24.

368. Сумма всех целых чисел, меньших простого числа p, всегда делится на p.

369. Какие из отношений больше: $\frac{a-b}{a+b}$ или $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, если $a>b$?

370. Показать, что из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$ следует пропорция $\frac{(a-b)^4}{(a_1-b_1)^4}=\frac{a^4+b^4}{a_1^4+b_1^4}$.

371. Доказать, если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{ab}{cd}=\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$.

372. Если $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, то $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

373. Если $b=\frac{a+c}{2}$ и $\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)$, то четыре числа a, b, c, d пропорциональны.

374. Говорят, что три числа a, b и c составляют гармоническую пропорцию, если $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$. Показать, что в этом случае $\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$.

375. Если b есть среднее гармоническое между a и c, т. е. $\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$, то $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$.

376. Показать, что во всякой пропорции можно заменить числители двух отношений: 1) средними арифметическими, 2) средними геометрическими двух членов каждого отношения.

377. Показать, что если c есть среднее пропорциональное между a и b, то $\frac{a}{b}=\frac{(a+c)^2}{(b+c)^2}$.

378. Проверить на числовом примере, что если четыре числа образуют пропорцию, то наибольший общий делитель крайних членов, наименьшее общее кратное средних членов, наибольший общий делитель средних и наименьшее общее кратное крайних членов образуют пропорцию.

379. Если четыре числа a, b, c, d таковы, что $b=\frac{a+c}{2}$, $\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)$, т. е. если второе есть среднее арифметическое первого и третьего, а третье среднее гармоническое второго и четвёртого, то эти четыре числа составляют пропорцию.

380. Существует ли такая геометрическая пропорция, что, если мы прибавим к каждому из её членов одно и то же число, то получим новую геометрическую пропорцию?

381. Проверить на числовых примерах, что любое натуральное число можно представить в виде суммы самое большее четырёх квадратов.

382. Проверить на числовых примерах свойство натуральных чисел: если мы имеем два числа, из которых каждое может быть представлено в виде суммы двух квадратов, то этим же свойством обладает и произведение этих чисел. Пример: 13 и 41; $13\times 41=533$; $13=9+4$; $41=25+16$; $533=23^2+2^2$. Привести ещё примеры.

383. Проверить, что число $N=(2^{n+1}-1)\times 2^n$ всегда есть совершенное число, если $2^{n+1}-1$ число простое.

384. Доказать, что числа 16, 1156, 111556, ..., каждое из которых получается из предыдущего вписыванием в середину его 15, суть точные квадраты.

385. Составить несколько примеров, подобных следующему $\left(1\frac{7}{8}+\frac{5}{12}\right):\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{16}\right)$, чтобы ответом было число целое.

386. Дроби $\frac{13}{40}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{17}{30}$ разбить на два дробных слагаемых, чтобы знаменатель каждой дроби оказался меньше знаменателя данной дроби.

387. Дроби $\frac{17}{40}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{17}{24}$; $\frac{11}{24}$ заменить разностью двух дробей, знаменатель которых меньше знаменателя данной дроби. Найти способы такой замены.

388. $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{24}=?$

$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}+\frac{9}{20}+\frac{11}{24}=?$

Вычислив первую сумму, как узнать вторую сумму, не выполняя сложения?

389. Какое из двух чисел наибольшее:

1) $15+\frac{6}{13}+\frac{11}{13^2}+\frac{7}{13^3}+\frac{8}{13^4}+\frac{9}{13^5}$

или

2) $15+\frac{6}{13}+\frac{10}{13^2}+\frac{11}{13^3}+\frac{10}{13^4}+\frac{11}{13^5}$?

390. 9752 р. 52 к. округлено до 9800 руб. Найти абсолютную и относительную погрешности.

391. Округлить число 26758,1 так, чтобы относительная погрешность приближённого числа была не больше 1%.

392. Найдено, что воздух содержит по объёму азота 78,06%, кислорода 21,00%. Объясните, зачем во втором случае поставлены два нуля?

393. Найти сумму $1{,}414208+1{,}732021+1{,}415919$ с точностью до 0,01.

394. Найти сумму $1{,}41421324+1{,}7320565+3{,}14159265$ с точностью до 0,0001.

395. Вычислить разность чисел 1,73205623 и 1,4142254 с точностью до 0,0001.

396. Пользуясь правилом подсчёта цифр, найти разность чисел: 1) $6{,}3541-5{,}13$; 2) $4{,}577-2{,}3765$.

397. Вычислить с точностью до 0,01 разности: 1) $5\frac{5}{9}-2{,}7158$; 2) $7{,}4917-2\frac{5}{11}$.

398. Вычислить с точностью до 0,001: $\frac{4}{15}+\frac{6}{17}-\frac{8}{19}$.

399. Найти произведение двух чисел: 3,141592653 и 1,41422675 с точностью до 0,001.

400. Найти произведения, пользуясь правилом подсчета цифр: 1) $30{,}252\times5{,}373$; 2) $158{,}2\times0{,}12$.

401. Найти произведение $5\frac{5}{16}\times\frac{8}{23}$ двумя способами: 1) обратить обыкновенные дроби в десятичные с точностью до 0 001, перемножить и округлить результаты; 2) перемножить обыкновенные дроби и обратить полученный результат в десятичную дробь с точностью до 0,001.

402. Найти частное 4899, 5343821 : 78,943365 с точностью до 0,001.

403. Найти частное, пользуясь правилом подсчёта цифр:

1) 69,02 : 0,87215; 2) 56,15 : 0,24.

404. Найти частное с точностью до 0,01 $5\frac{1}{3} : 11\frac{1}{4}$ двумя способами: 1) обращая каждое число в десятичную дробь с двумя десятичными знаками и производя деление десятичных дробей; 2) производя деление в обыкновенных дробях и обращая частное в десятичную дробь.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Различные системы

1. 89; 899.

2. 8 сотен; 5 сотен тысяч.

3. $429_{10} = 3204_5$.

4. $572_{10} = 3b8_{12}$. Указание: $\begin{array}{r|l} 572 & 12 \\ \overline{92} & \overline{47} \\ \overline{8} & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 47 & 12 \\ \overline{36} & \overline{3} \\ 11 & \end{array}$

5. 1_2; 10_2; 11_2; 100_2; 101_2 и т. д.

6. $3204_5 = 429_{10}$. Указание: $3204_5 = 3 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 0 \times 5 + 4 = 375 + 50 + 4 = 429_{10}$.

7. $baa_{12} = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 10 = 1714$.

8. $1\bar{8}91_{12} = 2989_{10}$.

9. $3245_7 = 3 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 4 \times 7 + 5 = 1160_{10}$;
$3224_5 = 3 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 2 \times 5 + 4 = 439_{10}$;
$3ab_{12} = 3 \times 12^2 + 10 \times 12 + 11 = 563_{10}$.

10. $234_6 = 2 \times 6^2 + 3 \times 6 + 4 = 94_{10} = 10111_3$.

11. 7; 7^2; 7^3 и т. д.

12. 100_6; 1000_6; 10000_6; 100000_6.

13. $x = 7$; $125246_7 = 1 \times 7^5 + 2 \times 7^4 + 5 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 4 \times 7 + 6 = 23456$.

14. $x = 7$.

15. $5^2 = 25$; $4^3 = 64$; единица 4-го разряда четвертичной системы счисления больше.

16. Отодвинутся влево на первое место, на второе, на третье.

17. Увеличится на 1300; на 7800.

Указание. 23042_5;

$$\begin{array}{l} -2342_5 \\ \hline 20200_5 = 2 \times 5^4 + 0 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 0 \times 5 + 0 = \\ \quad = 1250 + 50 = 1300_{10}. \end{array}$$

18. $46 = 64_x = 6 \times x + 4$; $x = 7$ (по семиричной системе).

19. $ab_{10} = ba_4$; $10a + b = 4b + a$; $9a = 3b$; $3a = b$; если $a = 1$, то $b = 3$, $13_{10} = 31_4$; если $a = 2$, то $b = 6$; $26_{10} = 62_4$ и, наконец, если $a = 3$, то $b = 9$; $39_{10} = 93_4$.

20. Десятки квадриллионов.

21. 24 цифры.

22. 9; 189; 2889.

23. 44 цифры.

24. 792 цифры.

Указание. Первые 9 страниц потребуют 9 цифр; следующие 90 страниц потребуют $2 \times 90 = 180$ цифр; остальные $300 - 99 = 201$ страница потребует $3 \times 201 = 603$ цифр.

25. 1947 страниц.

Указание. Первые 999 страниц потребуют $9 + 2 \times 90 + + 3 \times 900 = 2889$ цифр; остаётся $6681 - 2889 = 3792$ цифр; $3792 : 4 = 948$ (страниц); $999 + 948 = 1947$ (страниц).

26. 568.

Указание. В пятиричной системе счисления однозначных чисел 4, двузначных 20_{10}, трёхзначных 100_{10}. $1210_5 = 180_{10}$; $180 - 4 - 20 - 100 = 56$, т. е. от 1000_5 до 1210_5 включительно 56 четырёхзначных чисел. Всего цифр потребуется $4 + 2 \times 20 + + 3 \times 100 + 4 \times 56 = 568$.

27. Указание. Написав все числа от 1 до 999 включительно, мы заняли бы их цифрами 2889 мест ($9 + 180 + 2700$); $18347 - 2889 = 15458$; $15458 : 4 = 3864$ (2 в остатке); 3864 полных четырёхзначных чисел и 2 первые цифры 3865-го четырёхзначного числа; 3864-е четырёхзначное число занимает сначала $3864 + 999 = 4863$-е место; для следующего числа имеются две цифры 4 и 8; на 18347-м месте стоит цифра 8.

28. 600 000. Указания. От 1 до 9 один раз; от 10 до 99 в первом месте напишется 10 раз и по одному разу в каждом из 9 десятков на втором месте; всего 19 раз, а от 1 до 99 20 раз. От 100 до 999 на первом месте в первой сотне 100 раз; 10 раз в каждой из 9 сотен на втором месте и, наконец, 10 раз в каждой из 9 сотен на месте единиц, всего 280 раз, а от 1 до 999 цифра 1 напишется $20 + 280 = 300$ раз, т. е. 3×10^2, и т. д. Методом доказательства от n к $(n + 1)$ можно вывести, что от 1 до 99, ..., 999 (n раз) единица повторится $n \times 10^{n-1}$ раз.

2. Четыре действия с натуральными числами в различных системах счисления

а) Сложение и вычитание

29. 1) 13031_7. Указание. Действия над отдельными разрядами производятся по десятичной системе счисления, результат записывается по семиричной системе, 7 единиц низшего разряда превращаются в единицу высшего разряда и т. д.

30. 1) 2442_7; 3) $4b\ 958_{12}$.

31. При пятиричной системе счисления.

Указание. $2\times x^2+4\times x+1+1\times x^2+3\times x+4=4\times x^2+$ $+3\times x$; $x^2-4x-5=0$; $x=5$.

32. При семиричной системе счисления.

Указание. $2\times x^2+3\times x+6-1\times x^2-4\times x-5=$ $=6\times x+1$; $x^2-7x=0$; $x(x-7)$; $x=7$.

33. $7=2^2+2^1+2^0$; $11=2^3+2^1+2^0$ и т. д.

34. Указание. Ввести арифметическое дополнение.

35. 13; 10; 17. Указание. Третье больше первого на 4, а третье больше второго на 7 и т. д.

36. 26 раз. Указание. $1+52=53$; $2+51=53$ и т. д.

37. Обратится в нуль.

38. Увеличится на 235000.

39. Сотни.

40. 42 раза. Указание. Наименьшее уменьшаемое 58, а наибольшее 99 и т. д.

41. 18887.

42. На 540000.

43. В 2639.

44. Указание. Из числа, содержащего данную значащую цифру и вправо от неё 4 нуля, надо вычесть число, содержащее ту же самую значащую цифру и вправо от нее три нуля. Проверьте.

45. К сумме надо прибавить разность чисел 76300 и 37600.

46. Больше на 90000.

47. Уменьшится на 90909.

48. Сумму чисел 732 и 317 надо вычесть из 2746.

49. Больше на разность чисел 2437 и 689.

50. Указание. $1=2^0$; $2=2^1$; $4=2^2$; $8=2^3$; $16=2^4$ и т. д. Любое же число можно представить как сумму степеней числа 2, например $9=2^3+2^0$; $17=2^4+2^0$ и т. д.

51. Любое число граммов можно выразить суммой или разностью чисел, показывающих вес данных гирь.

Например: 23 *г* = 10 *г* × 2 + 1 *г* × 3; 39 *г* = 10 *г* × 4 − 1 *г* и т. д.

52. Указание. 1) Допустим, что правило верно для n и $n+1$ членов: $1+(0+1+1+2+3+5+\ldots u_{n-1}+u_n)=u_{n+2}$;

$$1+(0+1+1+2+3+5+\ldots u_n+u_{n+1})=u_{n+3}.$$

Складывая почленно, получим:

$$1+(1+0)+(0+1)+(1+1)+(1+2)+(2+3)+\ldots+$$
$$+(u_{n-1}+u_n)+(u_n+u_{n+1})=u_{n+2}+u_{n+3}$$

или

$$1+(1+1+2+3+5+\ldots+u_{n+1}+u_{n+2})=u_{n+4}$$ и т. д.

б) Умножение и деление

53. 1) $\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}635_7\\215_7\end{array}\\ \hline 4444\\ 635\\ 1603\\ \hline 204424_7\end{array}$; 3) 4373510_8; 4) 62460_{12}

Примечание. Действия над отдельными разрядами производятся по десятичной системе счисления, результат записывается по семиричной, 7 единиц низшего разряда превращаются в единицу высшего разряда.

54. 1) $\begin{array}{l|l} 33356_7 & 13_7 \\ \cline{2-2} 26 & 2312_7 \\ \hline 43 & \\ 42 & \\ \hline 15 & \\ 13 & \\ \hline 26 & \\ \hline 0 & \end{array}$; 2) 235_{12}; 3) 11_2.

55. Указание. 1) $10_7^2 = 100_7$; 2) $13_7^2 = 202_7$; 3) $100_7 + 102_7 + 202_7 = 404_7$; 4) $404_7 : 55_7 = 5_7$; 5) $5_7 + 264_7 = 302_7$; 6) $302_7 \times 35_7 = 12403_7$.

56. Увеличится на $26\times4+15\times6+4\times6$.

57. Уменьшится на $26\times4+15\times6-4\times6$.

58. Произведение уменьшится на $m\ [(a+m)-b]$.

59. а) столько цифр, сколько их в данных числах вместе; б) столько цифр, сколько их в данных числах вместе, без одной цифры.

60. 1) 5; 6; 7; 8; 2) 1; 2; 3; 4; 3) 9; 10; 11; 12.

61. 111 111 111; 222 222 222; и т. д.

62. $327\times(1000-125)$ и т. д.

63. Число 80203 сделать множителем.

64. $600-6=594$. Например: $10\times594=(10\times6)\times100-10\times6$.

65. В 805 раз; $10419:453=23$; $23\times35=805$.

66. Так как к уменьшаемому прибавляется число, равное уменьшаемому, и к вычитаемому прибавляется число, равное вычитаемому, то к разности прибавляется число, равное уменьшаемому и от неё же отнимается число, равное вычитаемому, т. е. к разности прибавляется число, равное разности.

67. Приписав два нуля и разделив на 4, мы этим самым умножили на 25. Так как $975=1000-25$, то из произведения множимого на 1000 вычтем произведение множимого на 25.

68. Указание.

$$\begin{array}{l} 1+2+3+4+5+6+7+8+9=a \\ 2+4+6+8+10+12+14+16+18=2a \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 9+18+27+36+45+54+63+72+81= \\ \hfill =9a \\ \hline (1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2=a^2 \end{array}$$

69. $2\times 1=2$; $2\times 2=4$; $2\times 3=10_6$; $2\times 4=12_6$; $2\times 5=14_6$; $2\times 10_6=20_6$ и т. д.

70. 1) на 6; 2) на 5; 3) на 6; 4) на 1; 5) на 0.

71. $125_{10}=1000_5$; $234_5\times 1000_5=234\,000_5$.

72. Указание. $5^6=1\,000\,000_5$ и т. д.

73. Указание. $10_5+100_5+1000_5+10\,000_5+100\,000_5+1\,000\,000_5=1\,111\,110_5$ и т. д.

74. Указание. $(x-1)\times x+x=x\,(x-1+1)=x^2$.

75. Указание. $(x-1)\times x\times(x+1)+x=(x^2-1)\,x+x=x^3$.

76. Указание. $(x-1)\times x\times(x+1)\,(x+2)+1=(x-1)\times(x+2)\,(x^2+x)+1=(x^2+x-2)\,(x^2+x)+1=(x^2+x)^2-2\,(x^2+x)+1=(x^2+x-1)^2$.

77. Указание. $(2m-2)\,2m\,(2m+2)\,(2m+4)+16=16\,[(m-1)\times m(m+1)\,(m+2)+1]=16\,[(m^2+m-2)\,(m^2+m)+1]=16\,[(m^2+m)^2-2\,(m^2+m)+1]=16\,(m^2+m-1)^2$.

78. На $2000:8=250$.

79. В частном получится 45, а в остатке — число, которое равно первому делителю, умноженному на 7.

80. Например: $1803:12=150$ (в остатке 3); $1803:150=12$ (в остатке 3). Для получения остатка вычиталось во втором делении из данного делимого то же самое произведение, которое в первом делении вычиталось из того же самого делимого.

81. В частном получится число, которое единицей больше данного делителя, а в остатке будет нуль. Например: $252:125=2$ (в остатке 2); $252:2=126$.

82. К утроенному частному надо прибавить частное, полученное от деления остатка 145 на 68 (в остатке будет 9).

83. Пусть требуется разделить 1712 на 96, получим $1712:96=17$ (в остатке 80)$\cdot 1712=17\times 96+80$. Чтобы сумма 1712 чисел 17×96 и 80 от увеличения делителя 96 на 1 не изменилась, следует слагаемое 80 уменьшить на 17; $1712=17\times 97+63$. Увеличение делителя 96 на 1 возможно произвести лишь 4 раза, так как частное $80:17=4$ (в остатке 12).

84. Чтобы разделить какое-нибудь число N на произведение чисел a, b, c, достаточно число N разделить на одного из сомножителей, полученное целое частное на другого и т. д. Остаток будет: abr_3+ar_2+r, где r_1, r_2, r_3 — остатки от деления N на a, b, c. В данном случае остаток будет $3\cdot 5\cdot 0+3\cdot 2+1=7$, а частное 41.

85. Указание. Нечётное число при делении на 8 даёт в остатке 1, 3, 5 или 7, но $5=8-3$; $7=8-1$ и т. д.

86. Указание. Натуральное число при делении на 3 даёт в остатке 0, 1 или 2, но $2=3-1$ и т. д.

87. Указание. $a=bq+r$; $a+x=bq+(r+x)$; $r+x\leqslant b-1$.

88. Указание. Если остаток $r \geqslant$ частному q. Например: $78:10=7$ (в остатке 8); $78:11=7$ (в остатке 1).

89. Указание. Если $q>1$, то можно прибавить $x \leqslant r:(q-1)$, где q — частное, r — остаток. Например: $89:10=8$ (в остатке 9); $x \leqslant 9:(8-1)$.

90. $x \leqslant b-r-1$, где b — делитель, r — остаток.

91. При $q>r$.

92. Указание. $N \times 31 - N = 6600$.

93. Указание. $36_{10}=100_6$; $2345_6:100_6$; $q=23_6=15_{10}$; $r=45_6=29_{10}$.

3. Делимость чисел

94. Разделится, так как делитель 448 и остаток 252 делятся на 28.

95. $217:7=31$. Искомое произведение $217 \times 5 \times 9$.

96. 16; 25; 27; 49.

97. На 3.

98. Может всякий раз, когда сумма остатков от деления слагаемых на это число кратна ему.

99. Остатки 2, 1, 1, 3 при делении на 4; остатки 2, 2, 3, 4 при делении на 5.

100. Сумма двух чисел, разность которых равна 2, всегда число чётное.

101. Указание. Пусть $581:23=25$ (в остатке 6); $571:23=$ $=24$ (в остатке 9). От умножения нечётного делителя на 25 получится нечётное число, к которому для получения нечётного делимого 581 надо прибавить чётное число 6. Во втором случае от умножения делителя на 24 получится чётное число, к которому прибавляется нечётное число 9, чтобы получилось нечётное делимое 571.

102. Указание. Возможна сумма, например $7+8+9$, которая делится на 2, хотя не каждое её слагаемое делится на 2.

103. Указание. Условие необходимо, так как без него сумма не разделится на это число; оно и достаточно, так как при его наличии сумма обязательно разделится на это число.

104. Число, делящееся на 5 и на 9, делится и на 45; следовательно, достаточно справа приписать 5, а слева 3.

105. Первое число делится на 3 и на 8, второе на 4 и на 9, а их сумма на 12.

106. Указание. $948=289 \times 3+81$, а всякое число, которое делит делителя и делимое, должно разделить и остаток.

107. $625=5 \times 5 \times 5 \times 5$; $1000=2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$; чтобы число, оканчивающееся тремя нулями, могло делиться на 625, влево от нулей должна стоять цифра 5.

108. Указание. Возьмём два числа, разность которых 1, например 13 и 12. Помножим эти числа на какое-нибудь число и получим требуемые числа: $13\times9=117$; $12\times9=108$; $117-108=9$; $117:9=13$; $108:9=12$ и т. д.

109. Число 10 944 делится на 8. Первое слагаемое 2709 заменяем числом 2704, делящимся на 8; второе слагаемое 5103 заменяем числом 5096, также делящимся на 8. Тогда сумма уменьшится на $5+7=12$, а чтобы она осталась без изменения, третье слагаемое увеличим на 12 и т. д.

110. Указание. Пусть дано число 1276; $1276=159\times8+4$; $159=3\times53$; $1276=53\times3\times8+4$ и т. д.

111. Указание. Пусть дано число 1272; $1272:12=106$; $106=8\times13+2$; $1272=(8\times13+2)\times12=13\times8\times12+2\times12=$ $=13\times96+24$ и т. д.

112. Указание. Пусть два числа 1572 и 5127 изображены одними и теми же цифрами 1, 5, 7 и 2. Разность $5127-1572=$ $=3555$ делится нацело на 9. Действительно, число $1572=$ $=9\times174+6$; $5127=9\times569+6$; $5127-1572=9\times(569-174)$.

113. Указание. Пусть дано число $368\,312=368\times10^3+$ $+312=368\,(7\times11\times13-1)+312=368\times7\times11\times13-368+$ $+312=368\times7\times11\times13-(368-312)$ и т. д., т. е. взять разность между числами, состоящими из трёх последних цифр данного числа и из остальных; если эта разность делится на 7, 11 и 13, то и данное число делится на 7, 11 и 13.

114. Указание. Число, изображённое посредством единицы с 3, 6, 9, ... нулями, при делении на 37 даёт в остатке 1.

115. $1000=2^3\times5^3$; $588\,000=2^5\times3\times5^3\times7^2$.

116. Всего 46 чисел.

117. Указание. Числа-близнецы: 3 и 5; 5 и 7; 11 и 13 и т. д.

118. Указание. На основании признаков делимости мы заключаем, что число 983 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7 и т. д.

119. Указание. $2101=503+601+997$ и т. д.

120. Указание. Ряд натуральных чисел может быть представлен так: $6n$; $6n+1$; $6n+2$; $6n+3$; $6n+4$; $6n+5$ где n может быть равным 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... Только $6n+1$ и $6n+$ $+5$ могут быть простыми числами, но $6n+5=6n+6-1=$ $=6\,(n+1)-1=6n-1$, и т. д.

121. В любой системе счисления имеем:

$$144_x=x^2+4x+4=(x+2)^2\quad(x>4).$$

122. При $x>3$ имеем $1331_x=x^3+3x^2\times3x+1=(x+1)^3$.

123. Число должно оканчиваться на один нуль, на два нуля, на три нуля.

124. Сумма цифр, данного числа должна делиться на 3.

125. Если сумма цифр, данного числа делится на 4, то данное число делится на 4; если суммы цифр, стоящих на чётных и нечётных местах, равна или их разность кратна 6, то данное число делится на 6.

126. Указание. Разность таких чисел равна 2, а так как эти числа нечётные, то на два делиться они не могут.

127. Указание. 18 делителей. $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

$$\begin{array}{c} 1,\ 2,\ 4 \\ \times\ 1,\ 3,\ 9 \\ \hline 1,\ 2,\ 4,\ 3,\ 6,\ 12,\ 9,\ 18,\ 36 \\ \\ \times\ 5 \end{array}$$

$$\overline{1,\ 2,\ 4,\ 3,\ 6,\ 12,\ 9,\ 18,\ 36,\ 5,\ 10,\ 20,\ 15,\ 30,\ 60,\ 45,\ 90,\ 180.}$$

128. $12 = 2^2 \times 3$; $931 = 7^2 \times 19$; числа имеют одинаковое число делителей: $(2+1)(1+1) = 6$, так как число всех делителей равно произведению увеличенных на единицу показателей различных простых чисел, входящих в каноническое разложение данного числа.

129. Указание. $12\,600 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$. Сумма всех делителей равна:

$$\frac{2^4-1}{2-1} \times \frac{3^3-1}{3-1} \times \frac{5^3-1}{5-1} \times \frac{7^2-1}{7-1} = \frac{16-1}{1} \times \frac{27-1}{2} \times \frac{124}{4} \times \frac{49-1}{6} =$$

$15 \times 13 \times 31 \times 8 = 48\,360$.

Если число $n = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\gamma} \times \ldots l^{\lambda}$, то сумма всех делителей $S(n) = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \times \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \times \ldots \times \frac{l^{\lambda+1}-1}{l-1}$.

130. $6 = 1+2+3$; $28 = 1+2+4+7+14$ и т. д.

131. $284 = 2^2 \times 71$; $220 = 2^2 \times 5 \times 11$; $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$ и т. д.

132. Общий наибольший делитель данных чисел $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ и т. д. Делителей 12 (1, 2, 3, 5, 6, 9, ...).

133. Простое число 547.

134. 131.

135. Указание. От деления 17 595 и 9660 на их общие делители 3 и 5 получили числа 1173 и 644, общий наибольший делитель которых равен 23, а искомый общий наибольший делитель данных чисел равен $23 \times 3 \times 5$.

136. В меньшем числе 7 раз, в большем числе 12 раз.

$$a = 144 \times 2 \times 2 + 144 + 288 + 720 \text{ и т. д.}$$

$$\frac{a}{\ } \bigg| \frac{b}{1};$$

$$\frac{b}{\ } \bigg| \frac{720}{1};$$

$$\frac{720}{\ } \bigg| \frac{288}{2};$$

$$\frac{288}{0} \bigg| \frac{144}{2}.$$

137. Указание.

$$\begin{array}{rrrl} & & a & \mid b \\ & b & \mid c & \mid 1 \\ c & \mid d & \mid 3 & \\ & \mid 2 & & \end{array} \qquad \begin{aligned} d&=5, \\ c&=10, \\ b&=35, \\ a&=45. \end{aligned}$$

138. Указание. $2496:24=104$; $104=8\times 13$ есть произведение множителей, содержащихся в искомых числах, но не входящих в состав их общего наибольшего делителя. Эти множители должны быть взаимно простыми числами; $24\times 8=$ $=192$; $24\times 13=312$, и т. д.

139. Указание. Так как наименьшее общее кратное двух чисел равно произведению этих чисел, делённому на их наибольший общий делитель, то имеем $840:2=420$. Зная наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух чисел, найдём эти числа (см. предшествующую задачу): 4 и 210; 12 и 70; 20 и 42; 28 и 30; 140 и 6 и т. д.

140. 4 и 3150, 36 и 350 и т. д.

141. $N_1=28\times 5=140$; $N_2=28\times 9=252$.

142. $N_1=3960:11=360$; $N_2=3960:30=132$.

143. 24 и 144; 72 и 96; 48 и 120; $168:24=7$; $7=1+6=$ $=2+5=3+4$ и т. д.

144. $2\times 2\times 3\times 5\times 7=420$; $N_1=420\times 3=1260$; $N_2=420\times 4=$ $=1680$; $N_{21}=420\times 23=9660$; всего 21 число.

145. Число всех делителей равно произведению увеличенных на единицу показателей различных простых чисел, входящих в каноническое разложение числа:

$$60=2^2\times 3\times 5;\ (2+1)\ (1+1)\ (1+1)=12;\ 72=2^3\times 3^2;$$
$$(3+1)\ (2+1)=12;\ 90=2\times 3^2\times 5;\ (1+1)\ (2+1)\ (1+1)=12;$$
$$96=2^5\times 3;\ (5+1)\ (1+1)=12.$$

146. Указание. В состав каждого из искомых чисел должны входить три различных простых делителя, и потому число 24 должно быть произведением трёх чисел: $24=4\times 3\times 2=$ $2\times 4\times 3=3\times 2\times 4$; $N_1=2^3\times 3^2\times 5=360$; $N_2=1350$; $N_3=2250$.

147. Указание. Возьмём три числа 1008, 1512 и 1764. Их наибольший общий делитель равен 252. $1008=252\times 4$; $1512=$ $=252\times 6$; $1764=252\times 7$. Наименьшее кратное данных чисел равно $252\times 2\times 2\times 3\times 7=252\times 84$ и т. д.

148. Указание. Если бы взяли только два первых простых числа 2 и 3, входящих в каноническое разложение искомого числа, то имели бы: $2^5\times 3^5=32\times 343$; делителей было бы $(5+1)(5+1)=36$. Если бы взяли три простых числа 2, 3, 5, входящих в каноническое разложение, то имели бы $2^3\times 3^2\times 5^2=72\times 25=1800$; число делителей было бы $(3+1)(2+1)(2+1)=36$; $2^2\times 3^3\times 5^2=8\times 27\times 25=5400$; число делителей 36. Наконец, возьмём четыре простых числа 2, 3, 5 и 7. Искомое число будет $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$.

149. Указание. $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$. Искомое число будет $2^4 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 \times 11^1 = 55\,440$. Сравните это решение с решением предшествующей задачи.

150. $\left[\frac{42}{5}\right] + \left[\frac{42}{5^2}\right] = 8 + 1 = 9$.

151. Указание. $\left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{2^2}\right] + \left[\frac{100}{2^3}\right] + \left[\frac{100}{2^4}\right] + \left[\frac{100}{2^5}\right] + \left[\frac{100}{2^6}\right] = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$. Следовательно, 2 войдёт в степени 97, т. е. 2^{97}.

$100! = 2^{97} \times 3^{48} \ldots \times 47^2 \times 53 \times 59 \times 61 \times 67 \times 71 \times 73 \times 79 \times 83 \times 89 \times 97$.

152. Указание. $\left[\frac{13}{2}\right] + \left[\frac{13}{4}\right] + \left[\frac{13}{8}\right] + \left[\frac{13}{3}\right] + \left[\frac{13}{9}\right] + \left[\frac{13}{5}\right] + \left[\frac{13}{7}\right] + \left[\frac{13}{11}\right]$ и т. д.

153. Указание. $10! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$ и т. д.

154. Указание. Если обозначить через $\varphi(n)$ число натуральных чисел, меньших данного числа n и вместе с тем взаимно простых с n, то будем иметь:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right);$$

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k};$$

$$\varphi(60) = 60\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 16.$$

158. Указание. $2n(2n+2) = 4n(n+1)$. Из двух последовательных целых чисел n и $n+1$ одно чётное, а потому $n(n+1)$ всегда делится на 2, и т. д.

159. Указание $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. Из трёх последовательных натуральных чисел $(n-1)$, n и $(n+1)$ одно делится на 3, но так как n число простое, то на 3 делится либо $n-1$, либо $n+1$. Числа $n-1$ и $n+1$ суть последовательные чётные числа, и потому одно делится на 2, а другое на 4.

160. Указание. $(3m+1)(3n+2) = 3(mn+m+n)+2$.

161. Указание. Если число не делится нацело на 5, то оно оканчивается одной из цифр: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Квадрат же этого числа оканчивается одной из цифр: 1, 4, 6, 9 и т. д.

162. Указание. $N = n(n+1)(n+2)$. Число N кратно 2 и 3 и т. д.

163. Указание. Произведение четырёх последовательных чисел есть $n(n+1) \times (n+2) \times (n+3)$; если n число чётное, то произведение $n(n+2)$ делится на 8, так как одно из двух последовательных чётных чисел делится на 4, и т. д.

165. Указание. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$.

166. Указание. Между множителями числа $n(n+1)(2n+1)$ по крайней мере один множитель представляет собой число чётное и один множитель есть число, кратное 3.

167. Указание. $N_1 = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \ldots + a_1 10 + a_0$; $N_2 = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1}10 + a_n$; $N_1 - N_2 = a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-2} - 1)10 + \ldots + a_0(1 - 10^n) =$ кр. 9.

168. Указание. Если два числа a и b взаимно простые с 3, то a^2 и b^2 при делении на 3 дадут в остатке 1; $a^2 + b^2$ при делении на 3 даст в остатке 2.

169. Указание. $a^7 - a = a(a^6 - 1) = a(a^{7-1} - 1)$; по теореме Ферма (см. задачу № 156) это число делится на 7.

$$a(a^6 - 1) = a(a-1)(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) = (a-1)a(a+1)(a^4 + a^2 + 1);$$

это число делится на 6 (см. задачу № 162).

170. Указание. $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$, число n нечётное по условию, тогда $n-1$ и $n+1$ два последовательных чётных числа, произведение которых делится на 8; при делении n^2 на 3 в остатке будет 1.

171. Указание. $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n^3 + 6n^2 + 11n + 6) = n[n^2(n+1) + 5n(n+1) + 6(n+1)] = n(n+1)(n+2)(n+3)$, и т. д.

172. Указание. Если число n кратное 5, то $n^{100} = (5k)^{100} = 5^{100} \times k^{100}$, где k число целое, а потому n^{100} делится на 125. Если n не кратное 5, то оно взаимно простое с 5 и, следовательно, с 125. По теореме Эйлера $n^{100} - 1$ делится на 125.

173. Указание. Число вида $n^4 - 1 = n^{5-1} - 1$ делится по теореме Ферма на 5:

$$(n^4 - 1)(n^4 + 15n^2 + 1) = (n^2 + 1)[(n^2 - 1) \times (n^4 + n^2 + 1 + 14n^2)] = 14n^2(n^2 + 1) + (n^2 - 1)(n^4 + n^2 + 1) = 14n^2(n^4 + 1) + (n^6 - 1) \times 14n^2(n^2 + 1) \text{ кратно } 7;$$

число $n^6 - 1 = n^{7-1} - 1$ по теореме Ферма также кратно 7 и т. д.

174. Указание. Пусть $n = 2k + 1$. Тогда $n^4 + 7(7 + 2n^2) = n^4 + 2 \times 7n^2 + 7^2 = (n^2 + 7)^2 = [(2k+1)^2 + 7]^2 = [4k(k+1) + 8]^2$; $4k(k+1)$ делится на 2, $4k$, $k+1$ и на 8.

175. Указание. $n(n^2 + 5) = n(n^2 - 1 + 6) = n(n+1)(n-1) + 6n$ и т. д.

176. Указание. $n = 10y + x$; $2x + 3y + 17y = 2(10y + x) = 2n$.

177. Указание. $7^{n+2} + 8^{2n+1} = 7^{n+2} + 8^{2n+1} + 7^n \times 8 - 7^n \times 8 = 7^n(7^2 + 8) + 8(64^n - 7^n) = 57 \times 7^n + 8(64^n - 7^n)$. $64^n - 7^n$ кратно $64 - 7 = 57$; при $n = 0$ имеем $7^2 + 8 = 57$.

178. Указание. $3^{2n+2}\times 4+32n-36=4(3^{2n+2}+8n-9)$. Если $n=2k$, то $3^{2n+2}+8n-9=3^{4k+2}+16k-9=9[(3^4)^k-1]+$ $+16k=9(81^k-1)+16k$; 81^k-1 делится на $81-1=80$ и, следовательно, на 16 и т. д. Пусть теперь $n=2k+1$, тогда $3^{2n+2}+$ $+8n-9=3^{4k+4}+16k+8-9=(3^4)^{k+1}-1+16k=81^{k+1}-1+$ $+16k$, и т. д.

179. Указание. Разность $5^{2n+1}-13^n$ нечётных чисел есть число чётное; $3^2\times 2^{n+1}\times(1+18^{n-1})$ делится на 2.
$5^{2n+1}+3^2\times 2^{n+1}\times(1+18^{n-1})-13^n=5\times 25^n+18\times 2^n+$ $+18^n\times 2^n-13^n=5\times 25^n-5\times 2^n+5\times 2^n+18\times 2^n+(18\times 2)^n-$ $-13^n=5(25^n-2^n)+23\times 2^n+(36^n-13^n)$ и т. д.

180. При $n=5$ это число будет делиться на 641.

182. Оканчиваются на 07, 32, 57, 82.

183. $105n-1$.

184. 42 840. Указание. Искомое число должно делиться на 8 и на 9. Сумма цифр искомого числа должна делиться на 9. Сумма цифр сотен и единиц: $x+y=8$. На 4 делятся все те и только те числа, у которых две последние цифры выражают число, делящееся на 4. Следовательно, x может равняться 0,4 или 8 и т. д.

185. 1 380 456. Указание. $792=8\times 9\times 11$. Искомое число должно делиться на 8, на 9 и на 11. Чтобы искомое число делилось на 8, необходимо, чтобы $z=6$ $(456:8=57)$. $x+y=8$; $x-y=0$ и т. д.

186. 123 480 и 123 408.

4. Дробные числа

187. $\frac{20}{28}$.

188. Первая разность больше, так как вычитаемое $\frac{8}{15}$ меньше вычитаемого $\frac{9}{16}$.

189. Указание. Рассмотреть два случая: $\frac{a}{b}<1$ и $\frac{a}{b}>1$.

190. $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{6}{11}$ и т. д.

191. $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{11}$; $\frac{7}{31}$ и т. д.

192. $\frac{b-a}{b}$ несократимая дробь, в противном случае a и b имели бы общий делитель.

193. См. предшествующую задачу.

194. Указание. Даны дроби $\frac{a}{b}$, $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ .... Положим, наибольшая дробь $\frac{a}{b}=q$, тогда $\frac{a_1}{b_1}<q$, $\frac{a_2}{b_2}<q$, ...
$a_1<b_1q$, $a_2<b_2q$, ...; $a+a_1+a_2+\ldots<(b+b_1+b_2+\ldots)q$ и т. д.

195. К числителю прибавить числитель, умноженный на какое-нибудь число, а к знаменателю — знаменатель, умноженный на то же число: $\frac{a}{b}=\frac{na}{nb}=\frac{a+(n-1)a}{b+(n-1)b}$.

196. Указание. $\frac{10^n+2}{3}=\frac{10^n-1}{3}+1$.

197. Указание. Пусть даны две несократимые дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ и $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=k$ (k — целое число); тогда будем иметь:

$$\frac{ad+bc}{bd}=k;\quad ad+bc=bdk;$$

bc и bdk делятся на b и, следовательно, ad должно делиться на b, но b — взаимно первое с a, и потому d должно делиться на b. Точно так же убедимся, что b должно делиться на d, т. е. $b=d$.

198. Указание. Если бы данная дробь была сократимая, то всякий делитель $2n+1$ и $3n+1$ будет делителем и разности $(3n+1)-(2n+1)=n$; делитель же $2n+1$ и n должен делить и разность $(2n+1)-2n=1$.

199. Указание. Допустим обратное: тогда $n-6=15x$; $n-5=24y$, откуда $24y-15x=1$, что невозможно.

200. Указание. $(a-b)^2>0$; $a^2+b^2>2ab$.

201. Указание. Разность должна равняться $\frac{11}{30}$ уменьшаемого; разность составляет $\frac{11}{19}$ вычитаемого.

202. $11\frac{11}{40}$.

203. Указание. Вычитаемое должно содержать 12 частей разности, разделённой на 17 равных частей. Уменьшаемое должно содержать таких частей $12+17=29$ и разность составляет $\frac{17}{29}$ уменьшаемого.

204. Указание. Надо из общего знаменателя данных дробей, помноженного на одно из чисел 1, 2, 3, 4, ... и т. д., вычесть числитель данной суммы и под разностью написать полученный общий знаменатель; это и будет искомой дробью.

Проверить на примере: $\frac{11}{40}+\frac{17}{36}$.

205. Указание. $\frac{25}{37}\times 38=\frac{25}{37}\times(37+1)=25+\frac{25}{37}=25\frac{25}{37}$.

206. Указание. $\frac{11}{15}\times 1\frac{1}{4}=\frac{11}{15}\times\left(1+\frac{1}{4}\right)$ и т. д.

207. Указание. Множитель должен быть в 5 раз меньше обращённой дроби множимого.

Проверить на примере.

208. Указание. $\frac{a}{b}>1$; $\frac{a-(a-b)}{b}=\frac{b}{b}=1$.

209. $\frac{7}{3}$; $\frac{19}{7}$; $\frac{31}{11}$; $\frac{37}{13}$ и т. д.

210. Указание. У дроби числитель на 1 меньше знаменателя. Например: $75\times\frac{17}{18}=75\times\left(1-\frac{1}{18}\right)=75-\frac{75}{18}$ и т. д.

211. Указание. $\frac{m}{a}-\frac{m}{b}=\frac{mb-ma}{ab}=\frac{m(b-a)}{ab}$; $b-a=1$, т. е. знаменатель вычитаемой дроби единицей больше знаменателя первой дроби. Привести пример.

212. Указание. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$; $b=md$; $c=na$; $\frac{a}{md}:\frac{na}{d}=\frac{a\times d}{md\times na}=$ $=\frac{1}{mn}$.

Проверить на примере.

213. Указание. Первая дробь втрое больше второй, вторая втрое больше третьей, и следовательно, в искомой сумме третья дробь содержится 13 раз.

214. Когда числитель данной дроби на 1 меньше знаменателя, например: $11:\frac{9}{10}=11\times\frac{10}{9}=11\times\left(1+\frac{1}{9}\right)=11+\frac{11}{9}$.

215. Указание. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$; $\frac{a+1}{b}:\frac{c}{d}=\frac{(a+1)d}{bc}=\frac{ad+d}{bc}$.

Проверить на числовом примере.

216. Указание. $\frac{a+1}{b+1}-\frac{a}{b}=\frac{ab+b-ab-a}{b(b+1)}=\frac{b-a}{b(b+1)}$.

217. У искомых дробей числитель каждой из них должен быть делителем дроби $\frac{320}{9}=35\frac{5}{9}$, а знаменатель должен быть кратным 9 знаменателя дроби $\frac{320}{9}$. Например: $\frac{10}{9}$; $\frac{20}{18}$; $\frac{16}{9}$; $\frac{32}{18}$; $\frac{32}{27}$.

218. $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{a+b}$. Проверить на числовом примере.

219. $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{a-b}$. Проверить.

220. Указание. Умножаем обе части равенства $\frac{a}{b}+\frac{m}{n}=$ $=1$ на $\frac{a}{b}-\frac{m}{n}$ и т. д.

221. Указание. Исходя из тождества: $\frac{a}{b}=\frac{1}{q+1}+\frac{a-a_1}{b(q+1)}$, где q — частное от деления b на a, a_1 — остаток от этого деления, можно получить, что $\frac{a}{b}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q_1+1}+\frac{1}{q_2+1}+\ldots$ Например: $\frac{5}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$.

227. Указание. Знаменатель в дроби $\frac{a}{b}$, равной чистой периодической дроби, имеет вид 10^n-1, т. е. число взаимно первое с 10.

228. Указание. Пусть $N = 2^{\alpha} \times 5^{\beta}$, т. е. состоит только из множителей 2 и 5, тогда:

$$\frac{1}{N} = \frac{a}{10^m}, \text{ откуда } 10^m = a \times N \text{ и } 999 \ldots \times 10^m = \text{кр.} N.$$

Если же N не содержит множителей 2 и 5, то $\frac{1}{N} = \frac{b}{999 \ldots}$, откуда $999 \ldots = b \times N$ и $999 \ldots \times 10^m = \text{кр.}\ N$.

Если же N кратно 2,5 и другим множителям, то

$$\frac{1}{N} = \frac{c}{999 \ldots \times 10^m} \text{ и т. д.}$$

229. Если период имеет n цифр, то знаменатель есть делитель числа $10^n - 1$.

230. Указание. 1) Знаменатель 37 есть число простое с 10, и потому первая данная дробь обращается в чистую периодическую дробь; $10^3 - 1 = 999$; $999 : 37 = 27$; число цифр в периоде равно 3. Действительно, $\frac{8}{37} = 0{,}(216)$. 2) Дробь $\frac{20}{13}$ обращается в чистую периодическую дробь с периодом в 6 цифр, так как $999999 = 10^6 - 1$ делится на 13; $\frac{20}{13} = 1{,}(538461)$. 3) $\frac{3}{7} = 0{,}(428571)$.

231. 1) Дробь $\frac{9}{28} = \frac{9}{7 \times 2^2}$ обращается в смешанную периодическую дробь; число цифр от запятой до периода равно 2, число цифр в периоде будет 6, так как первое из чисел вида $10^q - 1$, делящихся на 7, есть $10^6 - 1 = 999999$.

Действительно, $\frac{9}{28} = 0{,}32\ (142857)$.

2) $\frac{53}{48} = \frac{53}{3 \times 2^4}$; от запятой до первого периода будет 4 цифры и в периоде 1 цифра.

233. В результате получатся чистые периодические дроби с одинаковым числом цифр в периоде.

234. 1) $\frac{3}{7} = 0,\ (428571)$; $4 + 5 = 9$; 2) $2 + 7 = 9$ и т. д.

236. 1) $0{,}7 = 0{,}6999 \ldots$; 2) $1{,}26 = 1{,}25999 \ldots$; 4) $2{,}30 = 2,\ 29(9)$.

237. Указание. Бесконечная дробь $0{,}999 \ldots$ есть предел последовательности конечных дробей $0{,}9$; $0{,}99$; $0{,}999$; ..., а предел последовательности чисел, меньших 1, может быть равным единице.

238. $\frac{3}{11} = 0{,}272727 \ldots$; $\frac{8}{11} = 0{,}727272 \ldots$; $2 + 7 = 9$; $7 + 2 = 9$.

240. Указание. $\frac{1}{7} = 0,(142857)$; $\frac{3}{7}$; $7 \times 3 = 21$; за цифрой 1 следует цифра 4; следовательно, $\frac{3}{7} = 0{,}428571$ и т. д.

241. 1) $\frac{1}{17}=0,(0588235294117647)$;

2) $\frac{1}{19}=0,(052631578947368421)$.

242. $\frac{1}{17}=0,(0588235294117647)$;

$$0+9=9;\ 5+4=9 \text{ и т. д.}$$

243. Указание. $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{3n^2+6n+2}{n(n+1)(n+2)}$; знаменатель как произведение трёх последовательных чисел делится на 6.

244. По семиричной $45_{10}=63_x$; $6\times x+3=45$; $x=7$.

245. Указание. $0,(03)_5=\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^4}+\frac{3}{5^6}+\ldots+=$

$$=\frac{\frac{3}{5^2}}{1-\frac{1}{5^2}}=\frac{\frac{3}{25}}{\frac{24}{25}}=\frac{3\times 25}{25\times 24}=\left(\frac{1}{8}\right)_{10}.$$

246. Указание. $0,56_8=\left(\frac{5}{8}\right)_{10}+\left(\frac{6}{8^2}\right)_{10}=\left(\frac{46}{64}\right)_{10}$;

$$0,0057_8=\frac{5}{8^3}+\frac{7}{8^4}=\frac{47}{8^4}=\frac{47}{64^2};$$

$$0,00(57)_8=\frac{47}{64^2}+\frac{47}{64^3}+\ \ldots\ =\frac{47}{64^2}:\left(1-\frac{1}{64}\right)=\frac{47}{4032};$$

$$\frac{46}{64}+\frac{47}{4032}=\frac{2945}{4032}.$$

247. Указание. $7_{10}=11_6$;

$$\begin{array}{r|l} 1 & 11_6 \\ \hline 100 & 0,050505\ldots \\ -55 & \\ \hline 1 & \end{array};$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)_{10}=0,(05)_6;$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 11_6 \\ \hline 20 & 0,141414\ \ldots \\ -11 & \\ \hline 50 & \\ -44 & \\ \hline 2 & \end{array};\qquad \left(\frac{2}{7}\right)_{10}=0,(14)_6.$$

248. Указания. 1) $7_{10}=11_6$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 11_6 \\ \hline 40 & 0,(32)_6 \\ 33 & \\ \hline 30 & \\ 22 & \\ \hline 4 & \end{array};$$

2) $9_{10}=13_6$; $\begin{array}{r|l} 5 & 13_6 \\ \cline{2-2} -\,50 & 0{,}32 \\ 43 & \\ \cline{1-1} -\,30 & \\ 30 & \end{array}$; 3) $10=14_6$ $\begin{array}{r|l} 3 & 14_6 \\ \cline{2-2} -\,30 & 0{,}1\,(4)_6 \\ 14 & \\ \cline{1-1} -\,120 & \\ 64 & \\ \cline{1-1} 12 & \end{array}$;

4) $\begin{array}{r|l} 4_8 & 7_8 \\ \cline{2-2} -\,40 & 0,\,(4)_8 \\ 34 & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$; 5) $9_{10}=11_8$; $\begin{array}{r|l} 5 & 11_8 \\ \cline{2-2} -\,50 & 0,\,(43)_8 \\ 44 & \\ \cline{1-1} -\,40 & \\ 33 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$;

6) $10=12_8$; $\begin{array}{r|l} 3 & 12_8 \\ \cline{2-2} -\,30 & 0{,}2\,(3146)_8 \\ 24 & \\ \cline{1-1} -\,40 & \\ 36 & \\ \cline{1-1} -\,20 & \\ 12 & \\ \cline{1-1} -\,60 & \\ 50 & \\ \cline{1-1} -\,100 & \\ 74 & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$.

249. Указание. $117_{10}=99_{12}$; $192_{10}=140_{12}$; $\begin{array}{r|l} 99_{12} & 140_{12} \\ \cline{2-2} -\,990 & 0{,}739_{12} \\ 940 & \\ \cline{1-1} -\,500 & \\ 400 & \\ \cline{1-1} -\,1000 & \\ 1000 & \end{array}$.

250. Указание. 1) $\begin{array}{r} 112{,}122_3 \\ +\;\;22{,}12_3 \\ \hline 212{,}012_3 \end{array}$; 2) $\begin{array}{r} 14{,}32_5 \\ +\;\;0{,}4312_5 \\ \hline 20{,}3012_5 \end{array}$.

251. Указание. 1) $\begin{array}{r} 61{,}124_7 \\ -\;\;35{,}536_7 \\ \hline 22{,}255_7 \end{array}$; 2) $\begin{array}{r} 100{,}1001_2 \\ -\;\;11{,}0111_2 \\ \hline 1{,}0010_2 \\ \hline 1{,}001_2 \end{array}$

252. Указание. 1)
$$\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}5{,}31_8\\ 7{,}24_8\end{array}\\ \hline 2544_8\\ +1262_8\quad\\ 4557_8\quad\quad\\ \hline 47{,}3264_8\end{array}$$
2) $2{,}121_9 \times 1{,}212_9 = 2{,}571652_9$.

253. Указание. 1) $3{,}241_5$; 2) $0{,}10377_8:0{,}23_8 = 10{,}377_8:23_8 = 0{,}345_8$.
$$\begin{array}{r}10377\\ -\underline{71}\quad\\ 127\quad\\ -\underline{114}\quad\\ 137\\ -\underline{137}\end{array}$$

5. Смешанные упражнения

254. Указание. Пусть a, b и c — три различные цифры. Тогда двузначные числа будут: $10a+b$; $10a+c$; $10b+a$; $10b+c$; $10c+a$; $10c+b$; их сумма $22a+22b+22c$ и т. д.

255. Указание. Пусть даны четыре цифры a, b, c и d. Тогда:
$$\{[(2a+5)\times 5+b]\times 10+c\}\times 10+d-2500=$$
$$=[(2a+5)\times 5+b]\times 100+10c+d-2500=(2a+5)\times 500+$$
$$+100b+10c+d-2500=1000a+100b+10c+d.$$

256. Указание. Пусть дано трёхзначное число ax^2+bx+ $+c$, где $a>c$; обратное число будет cx^2+bx+a; разность их $(a-c)x^2+(c-a)=ax^2-cx^2+c-a=ax^2-cx^2-x^2+$ $+x^2-x+c+x-a=x^2(a-c-1)+(x-1)x+(c+x-a)$ и т. д.

257. Указание. Наименьшее число из n цифр в какой-либо системе счисления равно 1 с $n-1$ нулями, и если основание системы a, то это число равно a^{n-1}. Самое меньшее число в системе с основанием a, которое имеет $n+1$ цифру, равно a^n. Все числа с n цифрами. Это все последовательные числа ряда, начинающегося с a^{n-1} и кончающегося на a^n-1; их число $(a^n-1)-a^{n-1}+1=a^{n-1}(a-1)$.

258. Указание. Два числа, кроме a и 1, сумма которых равна $a+1$, очевидно, меньше a и больше 1. Пусть x — одно из них, тогда другое $y=1+a-x$. Будем иметь:
$$(a-1)x=(x-1)a+(a-x);$$
$$(a-1)y=(a-x)a+(x-1) \text{ и т. д.}$$

259. Указание. Число $\frac{n(n+1)}{2}$ целое потому, что одно из последовательных чисел n и $n+1$ чётное и произведение $n(n+1)$ число чётное.

$2N=n(n+1)$ не оканчивается ни на 4, ни на 8. Произведение $n(n+1)$ оканчивается той же цифрой, как и произведение цифр единиц чисел n и $n+1$. Если предположить последовательно, что n оканчивается на 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, увидим, что $n(n+1)$ оканчивается на 0, 2, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 2, 0.

Таким образом, произведение $n(n+1)$ не оканчивается ни на 4, ни на 8 и т. д.

260. Указание. Пусть $N=aq+r$, где $r\leqslant a-1$; но r должно равняться q, потому $N=ar+r=r(a+1)$ и $r\leqslant a-1$. Следовательно, N есть произведение $a+1$ на какое-нибудь число, меньшее a.

261. Указание. $a=b$; $356+4623$; $4623<b$. Чтобы при прибавлении к делимому и делителю одного и того же целого числа x частное было 356, необходимо, чтобы $(b+x)\times 356\leqslant a+$ $+x<(b+x)\times 357$, или, отнимая от всех членов неравенств $b\times 356+x$, получим: $355\times x\leqslant 4623<b+356x$.

Второе неравенство справедливо, а чтобы $355x$ было $\leqslant 4623$, необходимо и достаточно, чтобы $x\leqslant 13$.

262. Указание. Пусть d — делитель, r — остаток.

$$802=d\cdot 14+r;\quad 0\leqslant r<d;$$

$$0\leqslant 802-d\cdot 14<d;\quad 14d\leqslant 802;\ 15d>802.$$

Но $802=14\times 57+4$ и $802=15\times 53+7$. Поэтому $14d\leqslant 14\times 57+$ $+4$ и $15d>15\times 53+7$. $57\geqslant d\geqslant 54$. Таким образом, d может быть равно 54; 55; 56; 57. Соответствующие остатки будут 46; 32; 18 и 4.

263. Указание. $A=d\times q+r$, где $r\leqslant d-1$. Отсюда $A\times n=$ $=d\times q\times n+r\times n$ и чтобы $q\times n$ было частным при делении $A\times n$ на d, надо, чтобы $r\times n\leqslant d-1$, т. е. $n\leqslant\frac{d-1}{r}$.

264. Указание. Пусть a и b целые числа. Тогда

$$a-1=bq+r,\ r\leqslant b-1\ldots \qquad (1)$$

$$ab^{n-1}-1=(bq+r+1)b^{n-1}-1=b^nq+(r+1)\times b^{n-1}-1\ldots \qquad (2)$$

Но из (1) $r+1\leqslant b$, потому в (2) $(r+1)b^{n-1}-1\leqslant b^n-1$. Следовательно, в равенстве (2) q есть частное от деления $ab^{n-1}-1$ на b^n.

265. 2634 цифры; 2742 цифры.

266. Указание. Пусть $10\,101=a^4+a^2+1$; $111=a^2+a+1$; $a^4+a^2+1=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

Таким образом, частное при делении данных чисел a^2-a+

$+1=a(a-1)+1$, т. е. написано по системе счисления с основанием a цифрами $a-1$ и 1.

267. Указание. Чтобы число N, написанное по системе счисления с основанием a, имело n цифр, необходимо и достаточно, чтобы $a^{n-1} \leqslant N < a^n$; при $a=2$ имеем:

$$2^7 \leqslant N < 2^8; \quad 12^1 < 2^7 < 12^2 < 2^8 < 12^3 \ldots .$$

Поэтому N заключается между 12^1 и 12^2 или 12^2 и 12^3. Следовательно, N имеет 2 или 3 цифры в двенадцатиричной системе счисления.

268. Указание. Тождества:

$$a+1=1\times(a-1)+2$$
$$a^2+a+1=(a+2)(a-1)+3$$
$$a^3+a^2+a+1=(a^2+2a+3)(a-1)+4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^n+a^{n-1}+\ldots+a+1=(a^{n-1}+2a^{n-2}+3a^{n-3}+\ldots+$$
$$+n)(a-1)+(n+1),$$

которые получаем, деля $a+1$, a^2+a+1 и т. д. на $a-1$, показывают, что при основании системы a имеем $(n<a)$:

$$1\times(a-1)+2=11_a;$$
$$12\times(a-1)+3=111_a \text{ и т. д.}$$

269. 1 и 2.

270. Указание. Пусть имеем трёхзначное число, написанное по системе счисления с основанием x, тогда будем иметь:

$$[(a+2)x^2+(a+1)x+a]-[ax^2+(a+1)x+a+2]=2x^2-2.$$

271. Указание. $(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1$; $n(n+1)$ — число, кратное 2, и, следовательно, $(2n+1)^2=$ $=$ кр. $8+1$.

272. Указание. Разность двух последовательных нечётных чисел равна 2; отсюда, если одно $2p-1$, то другое $2p+1$ и их сумма $4p$.

273. Указание. Числа от 1 до N содержат числа от 1 до 9, от 10 до 99 и от 100 до N. Число цифр этих чисел: $9+2\times90+3.(N-100+1)$, или $3N-108$. Чтобы это число делилось на N, необходимо и достаточно, чтобы 108 делилось на N; $N=108$.

274. Указание. $N=15m+6=24n+5$; $24n=15m+1$. $24n$ делится на 3; чтобы $15m+1$ делилось на 3, необходимо, чтобы и 1 делилась на 3, что невозможно.

275. $N=2^3\times3^2+4=76$.

276. Указание. Всякое число N имеет вид:

$N=$ кр. $7+(0$ или 1, или 2, или 3, или 4, или 5, или $6)$.
$N^2=$ кр. $7+(0$, или 1, или 4, или 2, или 2, или 4, или $1)$.
Если $N^2=$ кр. $7+2$, то $N^2+5=$ кр. 7.
Следовательно, $N=$ кр. 7 ± 3 или $N=$ кр. 7 ± 4.

277. Указание. $a=$ кр. $3+1$, $b=$ кр. $3+1$; $a^2=$ кр. $3+1$, $b^2=$ кр. $3+1$; $a^2-b^2=$ кр. 3.

$a^6-b^6=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$; $a^4+a^2b^2+b^4=$ кр. 3, а потому $a^6-b^6=$ кр. 9.

278. Указание. $2x\,78=2078+100x$; $2078=$ кр. $17+4$; $100=$ кр. $17-2$ и $100x=$ кр. $17-2x$; Следовательно, $2x\,78=$ $=$ кр. $17+2(2-x)$. Чтобы $2x\,78$ делилось на 17, надо, чтобы $2(2-x)$ равнялось нулю или было кр. 17; $2-x=0$, $x=2$.

279. Указание. Пусть $N=6^na_n+6^{n-1}a_{n-1}+\ldots+$ $+6a_1+a_0$. $N=$ кр. $6+a_0$. Чтобы N было кратным 2 и 3, необходимо и достаточно, чтобы последняя справа цифра была кратна 2 или 3. Например: $9_{10}=13_6$; $8_{10}=12_6$; $6=4+2$; $6^2=$ $=$ кр. 4; $6^n=$ кр. 4; $N=$ кр. $4+2a_1+a_0$.

Поэтому, чтобы число N делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр единицы и удвоенной цифры шестёрок делилась на 4.

280. Указание. Обозначим через $x_1, x_2, x_3, \ldots$ грани по 3 цифры справа налево. $N=x_1+1000x_2+1000^2x_3+\ldots$ $1000=$ кр. $37+1$; $N=$ кр. $37+(x_1+x_2+x_3+\ldots)$ и, чтобы N делилось на 37, необходимо и достаточно, чтобы x_1+x_2+ $+x_3+\ldots$ было кр. 37.

281. Указание. $N=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$; $x=(x-1)+1$; $\ldots x^n=[(x-1)+1]^n=$ кр. $(x-1)+1$, поэтому $N=$ кр. $(x-1)+(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0)$. Следовательно, чтобы N делилось на $x-1$, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр числа делилась на $x-1$.

Подобным образом имеем:

$$x=(x+1)-1;\ x^2=\text{кр.}\,(x+1)+1;\ \ldots\ x^n=\text{кр.}\,(x+1)+(-1)^n;$$

$$N=\text{кр.}\,(x+1)+[a_0-a_1+a_2-\ldots+(-1)^n a_n].$$

Чтобы число N было кр. $(x+1)$, необходимо и достаточно, чтобы разность суммы цифр нечётного порядка, начиная справа, и суммы цифр чётного порядка делились на $x+1$.

282. Указание. Пусть число N имеет 6 цифр.

$$N=a\times10^5+b\times10^4+c\times10^3+d\times10^2+e\times10+f.$$

Тогда обращенное число

$$N_1=f\times10^5+e\times10^4+d\times10^3+c\times10^2+b\times10+a.$$

$$N+N_1=(a+f)(10^5+1)+(b+e)\times10\times(10^3+1)+$$
$+(c+d)\times10^2\times(10+1)\cdot10^5+1$ и 10^3+1 делятся на 11, следовательно, и N_1+N_2 разделится на 11.

283. Указание. $10^n-(9n+1)=10^n-1-9n$, но $10^n-1=$ $=(10-1)\cdot(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1)=9\times($кр. $9+n)$, поэтому $10^n-(9n+1)=9($кр. $9+n)-9n=$ кр. 81.

284. Указание. $3^{2n+1}+2^{n+2}=3\times9^n+4\times2^n=3\times(7+2)^n+$ $+4\times2^n=3\times($кр. $7+2^n)+4\times2^n=$ кр. $7+(3+4)\times2^n=$ кр. 7.

285. Указание. $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 15 \times 25^n + 2 \times 8^n = 15 \times (17+8)^n + 2 \times 8^n = 15\,(\text{кр. } 17 + 8^n) + 2 \times 8^n = \text{кр. } 17$.

286. Указание. $N = 10^n - 1 = \underbrace{999\ldots99}_{n} = 9 \times \underbrace{11\ldots11}_{n}$, n должно быть кратным 9.

287. Указание.
$$
\begin{aligned}
4362 &= \text{кр. } 11 + 6\\
4362^2 &= \text{кр. } 11 + 6^2 = \text{кр. } 11 + 3\\
4362^3 &= \text{кр. } 11 + 6 \times 3 = \text{кр. } 11 + 7\\
4362^4 &= \text{кр. } 11 + 6 \times 7 = \text{кр. } 11 + 9\\
4362^5 &= \text{кр. } 11 + 6 \times 9 = \text{кр. } 11 + 10\\
4362^6 &= \text{кр. } 11 + 6 \times 10 = \text{кр. } 11 + 5\\
4362^7 &= \text{кр. } 11 + 6 \times 5 = \text{кр. } 11 + 8\\
4362^8 &= \text{кр. } 11 + 6 \times 8 = \text{кр. } 11 + 4\\
4362^9 &= \text{кр. } 11 + 6 \times 4 = \text{кр. } 11 + 2\\
4362^{10} &= \text{кр. } 11 + 6 \times 2 = \text{кр. } 11 + 1
\end{aligned}
$$

Остатки от деления последовательных степеней числа 4362 повторяются. $3275 = 327 \times 10 + 5$. Следовательно, остаток от деления 4362^{3275} на 11 есть 10.

288. Указание.
$$
\begin{aligned}
3012 &= \text{кр. } 13 + 9;\\
3012^2 &= \text{кр. } 13 + 3;\\
3012^3 &= \text{кр. } 13 + 1;\\
3012^4 &= \text{кр. } 13 + 9;\\
&\ldots\ldots\ldots\\
3012^{98} &= \text{кр. } 13 + 1;\\
163\,034^{89} &= \text{кр. } 13 + 1;\\
4^{67} &= \text{кр. } 13 + 4.
\end{aligned}
$$
$$N = (\text{кр. } 13 + 1) \times (\text{кр. } 13 + 1) \times (\text{кр. } 13 + 4) = \text{кр. } 13 + 4.$$

Остаток от деления числа N на 13 равен 4.

289. Указание. Точный квадрат не может иметь вида $4m + 2$ или $3m + 2$. Пусть a и b нечётные числа, т. е. $a = 2p + 1$, $b = 2q + 1$. Тогда:
$$a^2 + b^2 = 4\,(p^2 + q^2 + p + q) + 2 = 4m + 2.$$
$a^2 + b^2$ — не точный квадрат.

Пусть теперь a и b оба числа взаимно-простые с 3, т. е. $a = 3p + 1$, $b = 3r + 1$, тогда $a^2 + b^2 = 3k + 2$. Следовательно, одно из чисел a и b должно быть чётным и одно должно быть кратным 3, тогда ab разделится на 6.

290. Указание. $4373 = nq + 8$, $8 < n$;
$$826 = nq_1 + 7;\ 7 < n;$$
Отсюда $\qquad 4365 = nq,\ 819 = nq_1,\ n > 8.$

n — общий делитель чисел 4365 и 819; $n = 9$.

291. Через 13 860 дней. Общее наименьшее кратное чисел 15, 22, 36 и $7 = 13\,860$.

292. Указание. $a=2n+1$; $n=\frac{a-1}{2}$; $8b=a^2-1$.

Из последнего равенства следует, что a и b взаимно-простые числа.

293. Указание.

$$5a+3b=A,\ 13a+8b=B\ \ldots \qquad (1)$$

$$a=8A-3B,\ b=5B-13A\ \ldots \qquad (2)$$

Равенство (1) показывает, что всякий общий делитель чисел a и b делит A и B.

Равенство (2) показывает, что всякий делитель A и B делит a и b. Отсюда следует, что пары чисел a и b, A и B, имеющие общие делители, имеют и наибольший общий делитель.

294. Указание. Пусть A_1, B_1 и C_1 — остатки от деления чисел A, B и C на N.

Имеем:

$$P=(\text{кр. } N+A_1)\times(\text{кр. } N+B_1)\times(\text{кр. } N+C_1)\times D$$

или

$$P=\text{кр. } N+A_1\times B_1\times C_1\times D.$$

N и P, с одной стороны, и N и A, B, C, D, с другой стороны, имеют один и тот же наибольший делитель.

295. 198; 297; 396; 495; 594; 693; 792; 891 и 990.

9 и 11 — взаимно-простые числа, и потому число N должно делиться на их произведение. $N=99k$ и т. д.

296. Указание. $N=10d+n$, где d — число десятков, а n — число единиц. $5N=50d+5n=(51-1)d+5n=17+$ $+\text{кр. }(5n-d)$.

297. Указание. $A+5B=105a+21c=21(5a+c)$ и т. д.

298. Указание. Если число p взаимно-простое с 5, то имеем $p=\text{кр. } 5\pm1$ или $p=\text{кр. } 5\pm2$. Тогда $p^2=\text{кр. } 5+1$; $p^4=\text{кр. } 5+1$; $N=\text{кр. } 5+1+3\times(\text{кр. } 5+1)-4=\text{кр. } 5$.

299. 15 и 24.

300. Указание. Наибольший общий делитель 2520 и 119 есть 7. $2520:7=360$. Наибольший общий делитель 360 и 1816 равен 8; $360:8=45$. Наибольший общий делитель 45 и 549 равен 9. Искомый наибольший делитель равен $7\times8\times9=504$.

301. Указание. Пусть это число N, тогда $N=29q+5=31q_1+28$. $29q+5=31q_1+28$; $29(q-q_1)=$

$$=2q_1+23;\ q_1=3;\ N=121.$$

302. Указание. Всякое целое число кр. 6, или кр. 6 ± 1, или кр. 6 ± 2, или кр. $6+3$. Но если это целое простое и больше 3, оно нечётное и не кр. 3. Это целое, следовательно, кр. 6 ± 1 и его можно написать в форме $6a\pm1$. Его квадрат $36a^2+12a+1$ или $12a\times(3a\pm1)+1$, $a\,(3a\pm1)$. — чётное и потому рассматриваемый квадрат кр. $24+1$.

303. См. задачу № 302.

304. Указание. Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b; a_1 и b_1 — частные от деления a и b на d.

$$a = da_1;\ b = db_1;\ a + b = d(a_1 + b_1);$$

a_1 и b_1 — взаимно-простые числа, a_1 и $(a_1 + b_1)$ взаимно-простые числа и, следовательно, d — наибольший общий делитель a и $a + b$.

305. Указание. Пусть a и b — два целых числа, d — их наибольший общий делитель и m — наименьшее общее кратное. Имеем $a = da_1$; $b = db_1$; $m = a_1 \cdot b_1 \cdot d_1$; $a + b = (a_1 + b_1) \times d$. Но a_1 и b_1 — взаимно-простые числа; $a_1 b_1$ и $a_1 + b_1$ — также взаимно-простые числа; следовательно, d есть наибольший общий делитель m и $a + b$.

306. Указание. Пусть $a + b = s$; $a = da_1$; $b = db_1$; $a_1 + b_1 = \frac{s}{d} = \frac{192}{24} = 8$. Остаётся найти два числа a_1 и b_1 взаимно-простые и сумма которых равна 8.

$$a_1 = 1;\ b_1 = 7 \text{ или } a_1 = 3;\ b_1 = 5;$$

$$a = 24;\ b = 168 \text{ или } a = 72;\ b = 120.$$

307. Указание. Пусть искомые числа a и b, их общий наибольший делитель d, наименьшее общее кратное m. Тогда:

$$a = da_1;\ b = db;\ ab = a_1 b_1 d^2;$$

$$a_1 b_1 d = 2160;\quad d = \frac{51840}{2160} = 24;\ a_1 b_1 = \frac{2160}{24} = 90.$$

Если a_1 и b_1 — взаимно-простые числа, произведение которых 90, числа $a = a_1 \times 24$, $b = b_1 \times 24$ имеют произведение 51 840 и наименьшее общее кратное $2160 \cdot 90 = 2 \times 3^2 \times 5$.

Делители числа 90: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.

Получаем для a_1 и b_1:

1) $a_1 = 1$; $b_1 = 90$; 2) $a_1 = 2$, $b_1 = 45$;
3) $a_1 = 5$; $b_1 = 18$; 4) $a_1 = 9$; $b_1 = 10$.

Искомые числа: 1) $a = 24$; $b = 2160$; 2) $a = 48$, $b = 1080$; 3) $a = 120$; $b = 432$; 4) $a = 216$; $b = 240$.

308. Указание. Пусть $d = 36$, m — наименьшее общее кратное, равное 756.

$$a = 36\,a_1;\ b = 36\,b_1;\ 36\,a_1 b_1 = m;\ a_1 b_1 = \frac{756}{36} = 21;$$

$$a_1 = 1,\ b_1 = 21 \text{ или } a_1 = 3;\ b_1 = 7;\ a = 36;$$

$$b = 756;\ a = 108;\ b = 252.$$

309. Пусть искомые числа a и b, d — их наибольший общий делитель: $a=da_1$; $b=db_1$; $a+b=d(a_1+b_1)=4380$. Наименьшее общее кратное равно $da_1b_1=12\,600$;

$$\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}=\frac{12600}{4380}=\frac{630}{73};\; a_1+b_1=73;\; d=\frac{4380}{73}=60.$$

$$a_1=70;\; b_1=3;\; a=70\times60=4200;\; b=3\times60=180.$$

310. Указание. Пусть d и m — наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное искомых чисел: $a=da_1$, $b=db_1$; $m=a_1b_1d$. По условию задачи $a_1b_1d-d=(a_1b_1-1)d=$ $=18$; $a_1b_1=1+\frac{18}{d}$.

Делители 18: 1, 2, 3, 6, 9 и 18.

Следовательно, a_1b_1 имеет значения: 19, 10, 7, 4, 3, 2.

Отсюда: 1) $a_1=19$, $b_1=1$; 2) $a_1=10$, $b_1=1$; 3) $a_1=5$, $b_1=2$; 4) $a_1=7$, $b_1=1$; 5) $a_1=4$, $b_1=1$; 6) $a_1=3$, $b_1=1$; 7) $a_1=2$, $b_1=1$; $a=19$, $b=1$; $a=20$, $b=2$; $a=10$, $b=4$; $a=21$, $b=3$; $a=24$, $b=6$; $a=27$, $b=9$; $a=36$, $b=18$.

311. Указание. $60=2^2\times3^1\times5^1$; $a=12=2^2\times3^1$; $b=2^\alpha\times3^\beta\times5^\gamma$, причём $0\leqslant\alpha\leqslant2$; $0\leqslant\beta\leqslant1$; $\gamma=1$.

Значения b: 1) 5; 2) $2\times5=10$; 3) $3\times5=15$; 4) $2^2\times5=20$; 5) $2\times3\times5=30$; 6) $2^2\times3\times5=60$.

312. Указание. Сумма всех делителей $\frac{2^6-1}{2-1}\times\frac{p^2-1}{p-1}\times$ $\times\frac{q^2-1}{q-1}=3\times2^5pq$; $7\times9(p+1)\ (q+1)=3\times2^5\times p\times q$.

Так как p и q — взаимно-простые числа, то одно из них равно 7. Тогда будем иметь:

$$7\times9\times(7+1)\ (q+1)=3\times2^5\times7\times q;\; q=3.$$

313. Указание. Искомое число $N=a^\alpha\times b^\beta\times\ \ldots\ \times l^\lambda$. Число делителей равно $(\alpha+1)\ (\beta+1)\ \ldots\ (d+1)=9=3\times3$. Если $N=a^\alpha$, то $\alpha=8$; если $N=a^\alpha\times b^\beta$, то $\alpha=\beta=2$;

$$N=2^8=256;\; N=2^2\times3^2=36.$$

314. Указание. $(2^8-1)\ (p+1)\ (q+1)=\frac{85}{28}\times2^7\times p\times q$, или

$$3\times7\ (p+1)\ (q+1)=2^5\times p\times q;\; p=3;\; q=7.$$

315. Указание. Число всех делителей числа N равно $(\alpha+1)\ (\beta+1)\ (\gamma+1)$; число делителей $\frac{N}{a}=a^{\alpha-1}\times b^\beta\times c^\gamma$ будет $\alpha(\beta+1)\ (\gamma+1)$. Тогда:

$$(\alpha+1)\ (\beta+1)\ (\gamma+1)-\alpha(\beta+1)\ (\gamma+1)=(\beta+1)\ (\gamma+1)=63;$$
$$(\alpha+1)\ (\gamma+1)=45 \text{ и } (\alpha+1)\ (\beta+1)=35;\; \alpha=4;\; \beta=6 \text{ и } \gamma=8.$$

316. Указание. Пусть $N = xyztuv$ по десятичной системе счисления. $xyztuv \times 5 = vxyztu$;

$$(10u + v) \times 5 = v \times 10^5 + u;\ 49u = v\,(10^5 - 5).$$

$$10^5 - 5 = 99\,995 = 5 \times 7 \times 2857;\ 49n = v \times 5 \times 7 \times 2857;\ v = 7;$$

$$n = 14\,285;\ N = 142\,857.$$

317. Указание. 1) Положим $N = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots 999 \times 1000$; N делится на $7 \times 1,\ 7 \times 2,\ 7 \times 3,\ \ldots,\ 7 \times 142$ (142 — частное от деления 1000 на 7).

Показатель 7 в N есть показатель сомножителя в произведении $N_1 = (7 \times 1) \times (7 \times 2) \times \ldots \times (7 \times 142)$, или

$N_1 = 7^{142} \times (1 \times 2 \times 3 \ldots 142)$. Но показатель 7 в N_1 на 142 больше показателя 7 в произведении $N_2 = 1 \times 2 \times 3 \ldots 142$. То же рассуждение показывает, что показатель 7 в N_2 равен частному от деления 142 на 7, т. е. 20, и т. д.

$142 + 20 + 2 = 164$. Искомый делитель 7^{164} 2) 3^{498}.

318. Указание. См. предшествующую задачу.

$N = 1 \times 2 \times 3 \ldots 19 \times 20$. Простые сомножители: 2, 3, 5, 7, 11, 17, 19.

$$N = 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19.$$

319. Указание. $N = 1 \times 2 \times 3 \ldots 29 \times 30$

Наивысшая степень числа 2, которая делит N, есть 26, а наивысшая степень числа 5 есть 7. Число N оканчивается семью нулями.

320. Указание. $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \ldots \times l^\lambda$.

$$(\alpha + 1)\,(\beta + 1)\,(\gamma + 1) \ldots = 63 = 3 \times 3 \times 7 = 7 \times 9 = 3 \times 21.$$

N имеет три простых множителя, два или один.

1) $\alpha + 1 = 3,\quad \beta + 1 = 3,\quad \gamma + 1 = 7.$
2) $\alpha + 1 = 7,\quad \beta + 1 = 9,$
3) $\alpha + 1 = 3,\quad \beta + 1 = 21,$
4) $\alpha + 1 = 63.$

Сумма делителей $\dfrac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \times \dfrac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \times \dfrac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \ldots =$

$$= 51\,181 = 13 \times 31 \times 127.$$

$$\frac{a^3 - 1}{a - 1} \times \frac{b^3 - 1}{b - 1} \times \frac{c^7 - 1}{c - 1} = 13 \times 31 \times 127 \quad (1^0)$$

$$\frac{a^7 - 1}{a - 1} \times \frac{b^9 - 1}{b - 1} = 13 \times 31 \times 127 \quad (2^0)$$

$$\frac{a^3 - 1}{a - 1} \times \frac{b^{21} - 1}{b - 1} = 13 \times 31 \times 127 \quad (3^0)$$

$$\frac{a^{63} - 1}{a - 1} = 13 \times 31 \times 127 \quad (4^0)$$

Уравнение (1^0) пишется иначе:

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^6+c^5+c^4+c^3+c^2+c+1)=$$

$=13\times 31\times 127$ и, если оно возможно, то $a^2+a+1=13$; $b^2+b+1=31$ и $c^6+c^5+c^4+c^3+c^2+c+1=127$; $a=3$; $b=5$; $c=2$.

Уравнение (2^0) невозможно, так как наименьшее значение первой части при $a=3$, $b=2$ больше 51 181. (3^0) и (4^0) по тем же причинам не имеют решения.

$$N=2^6\times 3^2\times 5^2=14\,400.$$

321. Указание. Пусть P — произведение делителей числа N. Сумма показателей простых делителей N равна сумме показателей простых делителей P.

Но $P=\sqrt{N^n}=N^{\frac{n}{2}}$, где n — число делителей N, или $P=$ $=a^{\frac{\alpha n}{2}}\times b^{\frac{\beta n}{2}}\times\ldots\times l^{\frac{\lambda n}{2}}$; сумма показателей простых делителей P будет: $(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)\times\frac{n}{2}$.
Но $n=(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1)$, то окончательно будем иметь:

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\lambda+1).$$

322. Указание. При основании x данное число равно:

$$x^8+2x^7+3x^6+4x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1=$$
$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)^2.$$

323. Указание. По условию $a+b=$кр. 10.

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);\ a^2-b^2=\text{кр. }10$$

и, следовательно, a^2 и b^2 оканчиваются одной и той же цифрой.

324. Указание. $N=(n-1)\times n(n+1)(n+2)$;

$$N+1=(n^2+n-1)^2.$$

325. Указание. Если N^3 оканчивается на 5, N также оканчивается на 5;

$$N=10d+5;\ N^3=\text{кр. }100+75\times 10d+125=$$
$$=\text{кр. }100+10(5d+2)+5.$$

Цифра десятков числа N^3 есть $5d+2$, и потому $5d+2$ оканчивается семью или двумя.

326. Указание. $43\,200=2^6\times 3^3\times 5^2$.
$(a-1)^2(a^2-2a)(a^3-4a)=(a-1)^2\times a\times(a-2)\times a(a+2)(a-2)$; a и $a-2$ — два последовательных чётных числа, их произведение делится на 2^3; а $(a+2)$ также делится на 2^3, всё число, следовательно, делится на 2^6, а при делении на 3 даёт в остатке 1, а потому $a-1$ и $a+2$ делятся на 3 и т. д.

327. Указание. Возьмём треугольное число.

$$N=1+2+3+\ \dots\ +n=\frac{n(n+1)}{2};$$

$$\frac{n(n+1)\times 8}{2}+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2.$$

328. Указание. $\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)\ (n+2)}{2}=(n+1)^2.$

329. Указание. $\frac{3n^2-n}{2}+\frac{3(n+1)^2-(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}+$ $+\frac{(n+1)\ (n+2)}{2}+\frac{2n(2n+1)}{2}=n^2+n^2+(n+1)^2.$

330. Указание. N делится на 5; следовательно, $x=z=5$. Число $5y5$ делится на 3, т. е. $5+y+5$ делится на 3 и т. д.

332. Указание. $\frac{4141}{9999}=\frac{41\times 100\times 41}{99\times 100\times 99}=\frac{41\times 101}{99\times 101}=\frac{41}{99}$.

$$\frac{41\quad 41\quad 41}{99\quad 99\quad 99}=\frac{41\times 100^2+41\times 100+41}{99\times 100^2+99\times 100+99}=\frac{41(100^2+100+1)}{99(100^2+100+1)}=\frac{41}{99}.$$

333. Указание. $\frac{27425425-27425}{99900000}=$

$$\frac{27425\times 1000+425-(27\times 1000+425)}{99900000}=\frac{(27425-27)\times 1000}{99900000}=\frac{27425-27}{99900}.$$

334. $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}.$

335. Указание. При уменьшении данной дроби на $\frac{7}{24}$ её величина остаётся $\frac{17}{24}$ её величины, т. е. $\frac{275}{289}\times\frac{17}{24}$.

Получим это произведение, разделив 289 на $\frac{17}{24}$ или умножив на $\frac{24}{17}$. Получим $\frac{275}{408}$.

336. Указание. $\frac{a}{b}+\frac{a_1}{b_1}=\frac{ab_1+a_1b}{bb_1}.$

Если эта сумма целое число, bb_1 делит числитель, в частности b делит ab_1+a_1b и, следовательно, ab_1; но a и b — взаимно-простые числа, а потому b делит b_1. Точно так же можно доказать, что b_1 делит b; b и b_1 равны между собой.

337. Указание. Пусть искомая дробь $\frac{1}{n}$; имеем:

$$\frac{1}{n}<\frac{a}{b}\leqslant\frac{1}{n-1},\ \text{или}\ n>\frac{b}{a}\geqslant n-1.$$

Из этого двойного неравенства следует, что если b делится на a, то $n-1$ есть частное от деления b на a; если b не делится на a, то n будет частное с точностью до 1 (с избытком):
$\frac{a}{b}=\frac{7}{22}$; $\frac{1}{n}=\frac{1}{4}$; $\frac{7}{22}-\frac{1}{4}=\frac{3}{44}$; $\frac{1}{n_1}=\frac{1}{15}$; $\frac{3}{44}-\frac{1}{15}=\frac{1}{660}$; $\frac{7}{22}=\frac{1}{4}+$ $+\frac{1}{15}+\frac{1}{660}$.

338. $\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{558}$.

339. Указание. Умножив обе части равенства на b, получим:

$$ac = a + bc, \text{ или } a(c-1) = bc. \qquad (1)$$

Число c делит правую часть, должно делить и левую часть (1), но c и $c-1$ — взаимно-простые числа, следовательно, c делит a. Пусть $a = ck$; тогда равенство (1) примет вид:

$$ck(c-1) = bc; \ b = k(c-1).$$

Итак, чтобы имело место равенство $\frac{a}{b} \times c = \frac{a}{b} + c$, необходимо и достаточно, чтобы $a = ck$, $b = (c-1)k$, где k — целое число.

340. Указание. $\frac{a}{b} \times \frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b} + \frac{a_1}{b_1}$; $aa_1 = ab_1 + a_1 b$.

Из последнего равенства следует: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{a-b}$, т. е. необходимо, чтобы $a > b$, и потому дробь $\frac{a}{b}$ должна быть больше 1. Дробь же $\frac{a_1}{b_1}$ имеет тот же числитель, а знаменатель равен разности членов первой дроби.

Числовые примеры: $\frac{7}{5}$; $\frac{7}{7-5} = \frac{7}{2}$; $\frac{7}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{49}{10}$; $\frac{7}{5} + \frac{7}{2} = \frac{49}{10}$.

Существует бесчисленное множество пар дробей, удовлетворяющих данному условию.

341. Указание. Пусть $\frac{a}{b} = \frac{n}{2n+1}$; $a = n$; $b = 2n+1$; $b = 2a+1$. Наибольший общий делитель a и b есть 1, числа a и b — взаимно-простые.

342. $\frac{168}{252}$; $\frac{180}{240}$; $\frac{175}{245}$.

343. Указание. Пусть искомые дроби будут:

$$\frac{k_1 a}{k_1 b}; \ \frac{k_2 m}{k_2 n}; \ \frac{k_3 p}{k_3 q}.$$

Согласно условию, $k_1(a+b) = k_2(m+n) = k_3(p+q) = S$.

$$k_1 = \frac{S}{a+b}; \quad k_2 = \frac{S}{m+n}; \quad k_3 = \frac{S}{p+q}.$$

Чтобы k_1, k_2, k_3 были возможно меньшими числами, надо, чтобы S было наименьшим общим кратным $(a+b)$, $(m+n)$ и $(p+q)$. Найдя S, определим k_1, k_2 и k_3.

344. Указание. Пусть дробь $\frac{m}{n}$ равна несократимой дроби. $\frac{a_1}{b_1}$. Всякая дробь, равная $\frac{m}{n}$, может быть представлена в виде $\frac{ka_1}{kb_1}$. По условию должно иметь место $kb_1 - ka_1 = b - a$, откуда $k = \frac{b-a}{b_1 - a_1}$. Надо, чтобы k было целым числом, и потому $b - a$ должно делиться на $b_1 - a_1$. Это и будет условием решения задачи.

В числовом примере имеем:

$\frac{m}{n} = \frac{8}{68} = \frac{2}{17}$; $k = \frac{103-13}{17-2} = 6$; $ka_1 = 6 \times 2 = 12$; $kb_1 = 6 \times 17 = 102$.

Искомая дробь $\frac{12}{102}$.

345. Указание. Данные дроби больше $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}$ и т. д.

346. Указание. Пусть x и y — искомые числа.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1; \text{ отсюда } y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Чтобы y было целым числом, надо $x - 1 = 1$, или $x = 2$, тогда и $y = 2$.

347. Пусть x, y и z — искомые числа.

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Если $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$, то $\frac{3}{x} = 1$, $x = y = z = 3$.

Предположим, что $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$ не равны между собой.

Пусть $\frac{1}{z} > \frac{1}{3}$; $z < 3$ и равно 2 или 1.

Если $z = 2$, то $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ и при $x = y$ имеем $x = y = 4$.

Пусть $\frac{1}{y} > \frac{1}{4}$; $y < 4$. При $y = 3$ имеем:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1; \; x = 6.$$

348. Указание. Пусть искомая дробь $\frac{a}{b}$.

$a \times b = 550 = 2 \times 5^2 \times 11$. Надо представить это произведение как произведение двух взаимно-простых сомножителей; знаменатель b должен содержать только сомножители 2 и 5, так как $\frac{a}{b}$ несократимая дробь и равна конечной десятичной дроби.

Искомые дроби: $\frac{275}{2}$; $\frac{22}{25}$; $\frac{11}{50}$.

349. Пусть искомая дробь $\frac{a}{10^n}$; частные от деления этой дроби на $\frac{16}{75}$ и $\frac{4}{15}$ будут:

$$\frac{a \times 75}{10^n \times 16} \text{ и } \frac{a \times 15}{10^n \times 4} \text{ или } \frac{3a}{5^{n-2} \times 2^{n+4}} \text{ и } \frac{3a}{5^{n-1} \times 2^{n+2}}.$$

Наименьшее значение a, для которого эти частные целые числа, есть наименьшее общее кратное двух знаменателей, т. е. $5^{n-1}\times 2^{n-1}$.

$$\frac{a}{10^n}=\frac{5^{n-1}\times 2^{n+4}}{5^n\times 2^n}=\frac{2^4}{5}=3,2.$$

350. Указание. Пусть $A=\frac{A_1}{8^4}$ и $B=\frac{B_1}{8^4}$.

$$A_1=45\,637_8;\ B_1=45\,576_8;\ A_1>B_1 \text{ и потому } A>B.$$

351. Указание. Если несократимая дробь $\frac{a}{b}$ обращается в чистую периодическую дробь, число n цифр периода есть показатель наименьшей степени 10, которая при делении на b даёт остаток 1; иначе n есть наименьшее число такое, что $10^n-1=$кр. b.

Предположим, что $n=4$, $9999=$кр. 9.

b есть делитель числа 999, кроме 3, 9, 11, 33, 99, и

b есть одно из чисел 101, 303, 909, 1111, 3333, 9999.

352. Указание. Пусть a — цифра, стоящая до периода, bc — период; тогда будем иметь: 0, $abcbcbc$ . . . .

b и c должны быть различны; точно так же a и c должны быть различны. b может быть одной из цифр 0, 1, 2, 3, . . ., 8, 9. Если $b=0$, то c равно одной из 9 других цифр, что даёт 9 периодов 0,1 02, . . ., 09.

Периоду 01 соответствует для a какая-нибудь из 10 цифр, за исключением 1; периоду 02—какая-нибудь из 10 цифр, кроме 2. Девяти периодам соответствуют $9\times 9=81$ значение для abc. Если $b=1$, имеется 81 разное значение и т. д. Всего 810 значений для abc, следовательно, для несократимых дробей, которые обращаются в эти бесконечные дроби.

353. Указание. Дроби $\frac{a}{7}$ и $\frac{a}{13}$ обращаются в чистые периодические дроби с числом цифр в периоде 6.

$$\frac{a}{7}=\frac{p}{999999};\ \frac{a}{13}=\frac{p_1}{999999};\ \frac{p}{p_1}=\frac{13}{7}.$$

354. Указание. $\frac{a}{b}=\frac{p}{9}$; $p<9$; $\frac{a}{b}=\frac{1}{9}$ или $\frac{4}{9}$.

355. Указание. Пусть x — искомое число. $7\times x=333\ldots33$; $\frac{1}{7}=\frac{x}{333\ldots33}$ или $\frac{1}{21}=\frac{x}{999\ldots99}$; x есть период дроби, полученной из $\frac{1}{21}$; $x=47\,619$; $7\times 47\,619=333\,333$.

356. Указание. Пусть $A=2^\alpha\times 5^\beta$; $\frac{1}{A}=\frac{a}{10^n}$; A есть делитель 10^n и, следовательно, чисел 9×10^n, 99×10^n и т. д.

Пусть A — взаимно-простое число с 10. В этом случае $\frac{1}{A}$ обращается в чистую периодическую дробь; имеем $\frac{1}{A} = \frac{P}{99\ldots9}$; следовательно, A делит $99\ldots9$; $99\ldots9 \times 10^n$.

357. Указание. $2592 = 2^5 \times 3^4$; $\frac{971}{2^5 \times 3^4} = \frac{971 \times 3}{6^5} = \frac{2913}{6^5}$.

Выразим числитель 2913 в системе с основанием 6:

$$2913_{10} = 21\,253_6 = 2 \times 6^4 + 1 \times 6^3 + 2 \times 6^2 + 5 \times 6 + 3;$$

$$\frac{971}{2592} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{2}{6^3} + \frac{5}{6^4} + \frac{3}{6^5}.$$

358. Указание. $\frac{1237}{15625} = \frac{14422_5}{5^6} = \frac{1 \times 5^4 + 4 \times 5^3 + 4 \times 5^2 \times 2 \times 5 + 2}{5^6}$.

359. Указание. $a^3 - a = a(a+1)(a-1)$.

360. Указание. $p^4 + 4 = (p^2 + 2p + 2)(p^2 - 2p + 2)$.

361. Указание. Если число простое и больше 3, оно нечётное. Его общий вид $6a \pm 1$.

$(6a \pm 1)^2 = 36a^2 \pm 12a + 1 = 12a(3a \pm 1) + 1$ · a и $3a \pm 1$ различной чётности, а $(3a \pm 1)$ чётное и рассматриваемый квадрат кр. $24 + 1$ и потому p^2 есть число кр. $24 + 1$. Точно так же q^2 есть число кр. $24 + 1$; $p^2 - q^2 =$ кр. 24.

362. Указание. $N_1 = 2^1 \times 3^2 \times 7^6$; $N_2 = 2^2 \times 7^6$ и т. д.

363. Указание. $N_1 = 5^2 \times 7^6$; $N_2 = 5^6 \times 7^2$.

364. 64; 288; 32.

365. Указание. $p = 6n \pm 1$; $N = 4p^2 + 1 = 4(6n \pm 1)^2 + 1 = 144n^2 \pm 48n + 5 = (8n \pm 2)^2 + (8n \pm 1)^2 + (4n)^2$.

366. Указание.

$$p = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y);\ x - y = 1;$$
$$x + y = p;\ x = \frac{p+1}{2};\ y = \frac{p-1}{2}.$$

368. Указание. $1 + 2 + 3 + \ldots + (p-2) + (p-1)$; сумма чисел, равно отстоящих от концов, всегда p и т. д.

369. Указание. Приведём данные отношения к наименьшему общему знаменателю:

$\frac{(a-b)(a^2+b^2)}{(a+b)(a^2+b^2)}$; $\frac{(a^2-b^2)(a+b)}{(a^2+b^2)(a+b)}$; $(a-b)(a^2+b^2) < (a^2-b^2)(a+b)$

и следовательно, $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} > \frac{a-b}{a+b}$.

370. Указание. $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = q$; $a = bq$; $a_1 = b_1 q$; $\frac{(a-b)^4}{(a_1-b_1)^4} = \frac{b^4}{b_1^4}$. Так как $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$; $\frac{a-b}{b} = \frac{a_1-b_1}{b_1}$ и т. д., $\frac{a^4+b^4}{a_1^4+b_1^4} = \frac{b^4}{b_1^4}$, т. е. $\frac{(a-b)^4}{(a_1-b_1)^4} = \frac{a^4+b^4}{a_1^4+b_1^4}$.

371. Указание. $a = bq$; $c = dq$; $\frac{ab}{cd} = \frac{b^2}{d^2}$; $\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} =$

$$= \frac{b^2(1+q)^2}{d^2(1+q)^2} = \frac{b^2}{d^2};$$

следовательно, $\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$.

372. Указание. $(a+b)(c+d) = (a-b)(c+d)$; $bc = ad$ или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

373. Указание. $\frac{b}{a+c} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{c} : \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right) = \frac{1}{2}$;

$\frac{b}{a+c} = \frac{1}{c} : \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right)$; $b\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right) = (a+c) \times \frac{1}{c}$; $1 + \frac{b}{d} = \frac{a}{c} + 1$ и т. д.

374. Указание. $(a-b)c = (b-c) \times a$; $2ac = ab + bc$; $2 = \frac{b}{c} + \frac{b}{a}$ и т. д.

375. Указание. $2ac = b(a+c)$; $ac - bc = ab - ac$; $(a-b) \times$ $\times c = (b-c)a$ и т. д.

376. Указание. 1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; $\frac{\frac{a+b}{2}}{b} = \frac{\frac{c+d}{2}}{d}$;

2) $\frac{ab}{b^2} = \frac{cd}{d^2}$; $\frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{\sqrt{cd}}{d}$.

377. Указание. $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b+c} = q$; $\frac{a}{c} \times \frac{c}{b} = q^2$ или $\frac{a}{b} = q^2$; $\frac{a}{b} = \frac{(a+c)^2}{(b+c)^2}$.

379. Указание. $2b = a + c$; $c = \frac{2bd}{b+d}$; $c = \frac{(a+c)d}{b+d}$;

$c(b+d) = d(a+c)$; $cb = ad$; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

380. Пропорция, в которой равны между собой или оба предыдущих члена, или члены каждого отношения.

384. Указание. $\overbrace{11\ldots1}^{n}\,\overbrace{55\ldots56}^{n-1} = \overbrace{11\ldots1}^{n}\,\overbrace{55\ldots5}^{n}+1$, n-ое по порядку из рассматриваемых чисел равно:

$$(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1) \times 10^n + 5\,(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots +$$

$$+ 10 + 1) + 1 = \frac{10^n - 1}{10 - 1} \times 10^n + \frac{5\,(10^n - 1)}{10 - 1} + 1 =$$

$$= \frac{(10^n - 1) \times 10^n + 5 \times (10^n - 1) + 9}{9} = \frac{10^{2n} + 4 \times 10^n + 4}{9} = \frac{(10^n + 2)^2}{3}.$$

386. $\frac{13}{40} = \frac{1}{5} + \frac{1}{8}$.

387. $\frac{17}{40} = \frac{5}{8} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20} - \frac{1}{8}$.

389. Указание. Надо эти числа написать по тринадцатиричной системе.

390. Относительная погрешность 0,49%.

391. 26 800.

393. Указание. Берём слагаемые с точностью до 0,00001; $\approx 4{,}562$.

394. Указание. Каждое из чисел берём с точностью до 0,00001; $\approx 6{,}2879$.

395. $\approx 0{,}3178$

398. $\approx 0{,}198$.

399. $\approx 4{,}443$.

400. $\approx 162{,}5$; ≈ 19.

401. $\approx 0{,}47$.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 1

Вариант *a*

1) Число $N = 50612_8$ перевести на двенадцатиричную систему.

2) Найти x (основание системы счисления), если $3325_9 = 10103_x$.

3) Сколько потребовалось бы цифр для того, чтобы пронумеровать книгу в 800 страниц?

4) Произвести указанные действия:

а) $2301_5 + 4302_5$;
б) $12020_3 - 2101_3$;
в) $5072_8 \times 403_8$;
г) $1200_4 : 12_4$.

5) Сколько единиц можно прибавить к делимому и делителю, чтобы частное не изменилось?

6) Если число N разделить на 47, то оно уменьшится на 10 350. Найти число N.

7) Показать, что сумма пяти последовательных чисел кратна 5.

8) Показать, что всякое нечётное число может быть приведено к одному из следующих видов: $8n \pm 1$; $8n \pm 3$.

Вариант *b*

1) Число $N = 3413_6$ перевести на семиричную систему счисления.

2) Дано число $N = 624500_7$; уменьшить его в 49 раз.

3) В книге 130_{12} страниц. Сколько цифр надо отлить, чтобы пронумеровать все страницы по указанной системе?

4) Произвести указанные действия:

а) $2301_5+3340_5+1243_5$; в) $5026_7\times 6_7$;

б) $43\,206_8-25\,247_8$; г) $33\,356_7:13_7$.

5) При каком условии делитель и частное могут обменяться местами?

6) Найти частное и остаток от деления 4349 на (4. 5. 7), не отыскивая делителя.

7) При каком условии произведение трёх последовательных чисел делится на 24?

8) Написать общий вид квадратов чисел, не делящихся на 5.

Вариант *c*

1) Число $N=5064_{11}=1000\,2000\,2_x$. Найти x (основание системы счисления).

2) Число $N=57\,896_{10}=3\,323\,041_x$. Найти основание x, не прибегая к составлению уравнения.

3) Для пронумерования всех страниц в книге понадобилось 2181 цифра. Сколько страниц в книге?

4) Произвести указанные действия:

а) 4523_6+3452_6; в) $1234_5\times 12_5$;

б) $32105_8-16237_8$; г) $11001_2:1000_2$.

5) Можно ли и на сколько уменьшить делимое, чтобы частное не изменилось?

6) Если число N умножим на 47, то оно увеличится на 10 350. Найти число N.

7) Дано произведение двух неизвестных чисел. Показать, что сумма их будет наименьшая, если числа равны между собой.

8) При всяких целых a и b ($a>b$) одно из чисел a, b, $a+b$, $a-b$ делится на 3.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 2

Вариант *a*

1) Показать, что общий вид простого числа $6n\pm 1$.

2) Показать, что квадрат всякого нечётного числа, уменьшенный на 1, делится на 8.

3) Показать, что число $N=3^{3n}+95^{47n}-2^{2n+1}$ делится на 23 без остатка.

4) Вывести признаки делимости ва 4 и на 9 при шестиричной системе счисления.

5) Наименьшее общее кратное двух чисел 5052, их общий наибольший делитель 842. Найти эти числа, если они относятся между собой как 3 : 2.

6) Каково наименьшее число, имеющее 120 делителей?

7) Если дробь $\frac{a}{b}$ несократимая дробь, то $\frac{a+b}{ab}$ и $\frac{a-b}{ab}$ суть несократимые дроби.

8) Дана дробь 0,32 845 845 845 ... Показать, что

$$\frac{32\,845-32}{999\,00}=\frac{32\,845\,845-32\,845}{999\,00\,000}.$$

9) Дробь $0{,}2341_5$ написать по десятиричной системе счисления.

Вариант *b*

1) Показать, что квадрат всякого простого числа, кроме 2 и 3, имеет вид $24n+1$.

2) Показать, что число $N=2^{3n+3}+41-7n$ делится на 49 без остатка.

3) Если число $100a+10b+c$ делится на 21, то и число $4c-2b+a$ делится на 21.

4) Вывести признак делимости на 3 в семиричной системе счисления.

5) Общий наибольший делитель двух чисел 12; их наименьшее общее кратное 120. Найти число.

6) Найти наименьшее число, у которого 24 делителя.

7) Дана дробь 0,35(1234). Показать, что если за непериодическую часть в этой дроби принять 3512, то пределы дробей будут равны.

8) Если дробная часть смешанного числа есть несократимая дробь, то и равная ему неправильная дробь несократима.

9) Дробь $0{,}349_{12}$ написать по десятиричной системе счисления.

Вариант *c*

1) Удвоенное число вида $2n(n-1)$ есть квадрат нечётного числа, уменьшенный на 1.

2) Показать, что число $N=7^{2n+1}-48n-295$ кратно 228.

3) Найти число чисел меньших 55 и взаимно первых с ним.

4) Основание системы счисления 5. Найти признак делимости на 24.

5) Найти два числа, зная их сумму 4380 и их наименьшее кратное 37 800.

6) Найти остаток от деления 64^{245} на 9.

7) Доказать, что дробь, числитель которой больше или меньше знаменателя на 1, несократимая дробь.

8) Если обыкновенная дробь обращается в периодическую, то период делится на 11, если число цифр в периоде чётное и если знаменатель обыкновенной дроби есть число взаимнопростое с 11. Проверить это на примере.

9) Записать частное от деления 117 на 192 по двенадцатиричной системе счисления.

С. Ф. Филичев, Сборник упражнений по теоретической арифметике

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка сверху	Напечатано	Должно быть	По вине
12	9	произведение n,	произведение $n!$,	типографии
12	12	42, т. е. 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . , 42	42!, т. е. 1. 2. 3. 4. 5. 6 . . . 42	»
12	13	100	100!	»
58	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2n}$	автора